1. Cercherò alla fine di questa presentazione di rispondere alla domanda: qual'è il cuore della matematica? Ma prima è necessario discutere la natura della matematica. E voglio concentrare su un'aspetto strano e interessante della matematica: cioè, il potere del paradosso.

2. Paradosso #1. Cominciamo col paradosso il più difficile, mentre che siamo ancora svegli.

"Per studiare il ragionamento matematico, è necessario togliere ogni *significato* dal ragionamento."

Vedi il panello 7 ...

Certamente, questo procedimento non ha senso per la scienza, ma la matematica non è una scienza. Forse l'anologia migliore è la musica. Che significato ha l'inizio della quinta sinfonia di Beethoven? Non *significa*, ma *è*.

3. "Per esempio, nella formulazione originaria dell'aritmetica di Peano, il principio d'induzione matematica richidieva la comprensione della nozione di *proprietà*, e similmente per la teoria degli insiemi di Zermelo."

Oggi c'è un modo chiaro per distinguere tra un sistema di assiomi che richiede una comprensione del significato e un sistema formale: nel secondo caso si può programmare un computer con il sistema, ma non nel primo caso.

I sistemi di Peano e Zermelo, nelle formulazioni originarie, falliscono a questo criterio.

4. Giuseppe Peano (1859-1932)

5. Ernst Zermelo (1871-1953)

6. Lo studio del *ragionamento* matematico come esso stesso una parte della matematica, cioè una struttura *astratta*, è dovuto al grande matematico David Hilbert (1862-1943). È stato lui che ha capito che per studiare il *ragionamento* matematico con la stessa chiarezza e precisione con le quali i matematici studiano l'analisi e la geometria, è necessario scatare la semantica e concentrare sulla sintassi.

Ogni progresso successivo nella logica matematica dipende da questo discernimento di Hilbert, per esempio

7. i teoremi di incompletezza di Gödel (1906-1973) – Gödel è stato chiamato il più grande logico dopo Aristotele, ma forse sarebbe meglio chiamare Aristotele il più grande logico avanti Gödel –

8. i teoremi di indipendenza nella teoria degli insiemi di Cohen (1934-2007) – Paul ed io eravamo studenti insieme all'università di Chicago –

9. e le applicazioni della logica a problemi difficili dell'algebra da Julia Robinson (1919-1985)

10. Paradosso #2. Ecco un'altro parodosso potente, il paradosso di G. G. Berry (1867-1928), un biliotecario alla Bodleian: Consideriamo

il minimo numero non nominabile in meno di undici parole

Questo è una presentazione di matematica. Dunque, facciamo l'atto il più primitivo della matematica: contiamo

11.– 20.

Abbiamo nominato questo numero con dieci parole!

21. Sembra una sciocchezza, ma George Boolos (1940-1996) ha usato quest'idea per dare una dimostrazione *molto* più semplice del primo teorema di incompletezza di Gödel (per essere precisi, il teorema di Gödel-Rosser).

22. Paradosso #3. "Le equazioni della meccanica quantistica hanno una soluzione ben determinata, ma le predizioni della teoria non sono determinate."

Nella meccanica quantistica si può predire soltanto la *probabilità* di un risultato. È per questo che Einstein non ha mai accettato la teoria come una teoria completa. La meccanica quantistica è la teoria scientifica la più potente che ci sia, ma più di ottanta anni dopo l'inizio di questa teoria non c'è nessun consenso sull'*interpretazione* della teoria. Ci ho lavorato io per anni, ma sono tanto perplesso oggi che all'inizio.

Questo è un paradosso ancora non risolto.

23. Ecco l'equazione fondamentale della meccanica quantistica, l'equazione di Schrödinger. È bella semplicemente come un disegno, non è vero?

24. Ed ecco Schrödinger (1887-1961).

25. Paradosso #4. “Un oggetto può essere ruotato 360 gradi e entarare in un altro stato fisico, ma dopo due giri interi (720 gradi) ritorna allo stesso stato.”

Così è l’elettrone di Dirac.

26. Paul Dirac (1902-1984).

dimostrazione con la cintura

27. Paradosso #5. “Il rapporto tra la diagonale di un quadrato e il lato è irrazionale.”

Queto è il primo grande teorema della matematica, dovuto ai pitagorici.

28. Pitagora (c. 570-c. 495 AC)

29. – 30.

31. Paradosso #5. “Il moto casuale dimostra regolarità straordinarie.”

32. Mille esempi del processo di Wiener (moto browniano).

33. Qusto risultato vuol dire che il moto casuale, stocastico, *certamente* dopo n passi non devia molto più di $\sqrt{n}$ dal punto di partenza.

Nota bene la formula; la rivedremo.

34. Ultimo paradosso, #6. "I problemi i più semplici a proporre possono essere i più difficili a risolvere."

35. Bernhard Riemann (1826-1866)

36.

37. August Möbius (1790-1868)

38. Ecco una forma dell'ipotesi di Riemann, il più importante problema aperto della matematica. Vuol dire che la somma dei valori della funzione di Möbius si comporta esattamente come il moto stocastico. E perchè no? Perchè i numeri dovrebbero avere una preferenza per un numero *pari* di divisori primi, o vice versa? Ma nonostante i tentativi dei

più grandi matematici da più di 150 anni, nessuno ha potuto risolvere questo problema.

Forse questo problema non ti sembra molto semplice. Ma se anche un matematico apre a caso un periodico di matematica, se non è esperto nel ramo della matematica trattato nell'articolo, probabilmente non capirà un bel niente.

Ecco un altro problema aperto, ancora più semplice (ma meno importante). Un numero è chiamato *perfetto* se è la somma dei suoi divisori. Per esemipio, $6 = 1 + 2 + 3$ è perfetto, perchè 1, 2, e 3 sono i divisori di 6. Anche $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ è perfetto. Questo concetto risale a Pitagora, 2500 anni fa. Eclide ha dimostrato un bel teorema sui numeri perfetti pari, e 2000 anni dopo, nel settecento, Euler ha dimostrato l'inverso del teorema di Euclide.

Ma esiste un numero perfetto dispari? Questo problema rimane irresoluto dopo 2500 anni, e ci si lavora ancora. In quale altro campo si può dire che lo spirito umano dimostra tanta tenacia? In ben pochi. Questo problema non è importante per la tecnologia, e non è nemmeno importante per lo sviluppo ulteriore della matematica pura, ma *dobbiamo sapere.*

39. Ecco il cuore della matematica, quella natura che ci spinge a desiderare cose grandi. La matematica è utile per la scienza e per la tecnologia, ma il *cuore* della matematica è la battaglia contro l'ignoto.

Ecco la tomba di David Hilbert. Ci sta iscritto: Wir Müssen Wissen – Wir Werden Wissen"

Dobbiamo Sapere – Sapremo.