Proof of Theorem 98i

The theorem to be proved is

$x + y = y + x \quad \rightarrow \quad x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}y + x$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x + y) = (y + x)] \quad \& \quad [\neg\,(x + (\mathrm{S}y)) = ((\mathrm{S}y) + x)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $y + x = x + y$ from H:x:y

1: $\neg\,(\mathrm{S}y) + x = x + (\mathrm{S}y)$ from H:x:y

2: $\mathrm{S}(x + y) = x + (\mathrm{S}y)$ from 12;x;y

3: $\mathrm{S}(y + x) = y + (\mathrm{S}x)$ from 12;y;x

4: $(\mathrm{S}y) + x = y + (\mathrm{S}x)$ from 14;y;x

Equality substitutions:

5: $\neg\, y + x = x + y \quad \vee \quad \mathrm{S}(y + x) = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\,\mathrm{S}(x + y) = x + (\mathrm{S}y)$

6: $\neg\,\mathrm{S}(y + x) = y + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\,\mathrm{S}(y + x) = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$

7: $\neg\,(\mathrm{S}y) + x = y + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad (\mathrm{S}y) + x = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$

Inferences:

8: $\mathrm{S}(y + x) = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\,\mathrm{S}(x + y) = x + (\mathrm{S}y)$ by
0: $y + x = x + y$
5: $\neg\, y + x = x + y \quad \vee \quad \mathrm{S}(y + x) = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\,\mathrm{S}(x + y) = x + (\mathrm{S}y)$

9: $\neg\,(\mathrm{S}y) + x = y + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$ by
1: $\neg\,(\mathrm{S}y) + x = x + (\mathrm{S}y)$
7: $\neg\,(\mathrm{S}y) + x = y + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad (\mathrm{S}y) + x = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$

10: $\mathrm{S}(y + x) = x + (\mathrm{S}y)$ by
2: $\mathrm{S}(x + y) = x + (\mathrm{S}y)$
8: $\mathrm{S}(y + x) = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\,\mathrm{S}(x + y) = x + (\mathrm{S}y)$

11: $\neg\, \mathrm{S}(y+x) = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$ by

3: $\mathrm{S}(y+x) = y + (\mathrm{S}x)$

6: $\neg\, \mathrm{S}(y+x) = y + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(y+x) = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$

12: $\neg\, y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$ by

4: $(\mathrm{S}y) + x = y + (\mathrm{S}x)$

9: $\neg\, (\mathrm{S}y) + x = y + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$

13: $y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$ by

10: $\mathrm{S}(y+x) = x + (\mathrm{S}y)$

11: $\neg\, \mathrm{S}(y+x) = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$

14: QEA by

12: $\neg\, y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$

13: $y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$