Proof of Theorem 73

The theorem to be proved is

$x \leq y \quad \& \quad y \leq z \quad \rightarrow \quad x \leq z$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $\quad [[(x) \leq (y)] \quad \& \quad [(y) \leq (z)] \quad \& \quad [\neg\,(x) \leq (z)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $x \leq y$ from H;x:y:z

1: $y \leq z$ from H;x:y:z

2: $\neg\, x \leq z$ from H;x:y:z

3: $\neg\, x \leq y \quad \vee \quad x + (y - x) = y$ from 68;x;y

4: $\neg\, y \leq z \quad \vee \quad y + (z - y) = z$ from 68;y;z

5: $x + ((y - x) + (z - y)) = (x + (y - x)) + (z - y)$ from 72;x;$y - x$;$z - y$

6: $x \leq x + ((y - x) + (z - y))$ from 71;x;$y - x) + (z - y$

Equality substitutions:

7: $\neg\, x + (y - x) = y \quad \vee \quad \neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = (x + (y - x)) + (z - y) \quad \vee \quad x + ((y - x) + (z - y)) = (y) + (z - y)$

8: $\neg\, y + (z - y) = z \quad \vee \quad \neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = y + (z - y) \quad \vee \quad x + ((y - x) + (z - y)) = z$

9: $\neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = z \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + ((y - x) + (z - y)) \quad \vee \quad x \leq z$

Inferences:

10: $x + (y - x) = y$ by

0: $x \leq y$

3: $\neg\, x \leq y \quad \vee \quad x + (y - x) = y$

11: $y + (z - y) = z$ by

1: $y \leq z$

4: $\neg\, y \leq z \quad \vee \quad y + (z - y) = z$

12: $\neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = z \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + ((y - x) + (z - y))$ by

2: $\neg\, x \leq z$

9: $\neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = z \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + ((y - x) + (z - y)) \quad \vee \quad x \leq z$

13: $\neg\, x + (y - x) = y \quad \vee \quad x + ((y - x) + (z - y)) = y + (z - y)$ by

5: $x + ((y - x) + (z - y)) = (x + (y - x)) + (z - y)$

7: $\neg\, x + (y - x) = y \quad \vee \quad \neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = (x + (y - x)) + (z - y)$ $\vee \quad x + ((y - x) + (z - y)) = y + (z - y)$

14: $\neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = z$ by

6: $x \leq x + ((y - x) + (z - y))$

12: $\neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = z \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + ((y - x) + (z - y))$

15: $x + ((y - x) + (z - y)) = y + (z - y)$ by

10: $x + (y - x) = y$

13: $\neg\, x + (y - x) = y \quad \vee \quad x + ((y - x) + (z - y)) = y + (z - y)$

16: $\neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = y + (z - y) \quad \vee \quad x + ((y - x) + (z - y)) = z$ by

11: $y + (z - y) = z$

8: $\neg\, y+(z-y) = z \;\vee\; \neg\, x+((y-x)+(z-y)) = y+(z-y) \;\vee\; x+((y-x)+(z-y)) = z$

17: $\neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = y + (z - y)$ by

14: $\neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = z$

16: $\neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = y + (z - y) \quad \vee \quad x + ((y - x) + (z - y)) = z$

18: QEA by

15: $x + ((y - x) + (z - y)) = y + (z - y)$

17: $\neg\, x + ((y - x) + (z - y)) = y + (z - y)$