Proof of Theorem 272i

The theorem to be proved is

$[x \leq y \quad \to \quad \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}y] \quad \to \quad [x \leq \mathrm{S}y \quad \to \quad \mathrm{Q}x \leq \mathrm{QS}y]$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[\neg\,(x) \leq (y) \quad \vee \quad (\mathrm{Q}x) \leq (\mathrm{Q}y)] \quad \& \quad [(x) \leq (\mathrm{S}y)] \quad \& \quad [\neg\,(\mathrm{Q}x) \leq (\mathrm{Q}(\mathrm{S}y))]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\neg\, x \leq y \quad \vee \quad \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}y$ from H:x:y

1: $x \leq \mathrm{S}y$ from H:x:y

2: $\neg\, \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$ from H:x:y

3: $\neg\, x \leq \mathrm{S}y \quad \vee \quad x \leq y \quad \vee \quad \mathrm{S}y = x$ from 110;x;y

4: $\mathrm{Q}(\mathrm{S}y) \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$ from 60;Q(Sy)

5: $\mathrm{Q}y \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$ from 271;y

6: $\neg\, \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Q}y \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$ from 73;Qx;Qy;Q(Sy)

Equality substitutions:

7: $\neg\; x = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \mathrm{Q}(x) \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\; \mathrm{Q}(\mathrm{S}y) \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$

Inferences:

8: $x \leq y \quad \vee \quad \mathrm{S}y = x$ by
1: $x \leq \mathrm{S}y$
3: $\neg\, x \leq \mathrm{S}y \quad \vee \quad x \leq y \quad \vee \quad \mathrm{S}y = x$

9: $\neg\, \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Q}y \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$ by
2: $\neg\, \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$
6: $\neg\, \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Q}y \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$

10: $\neg\, \mathrm{S}y = x \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Q}(\mathrm{S}y) \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$ by
2: $\neg\, \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$
7: $\neg\, \mathrm{S}y = x \quad \vee \quad \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Q}(\mathrm{S}y) \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$

11: $\neg\, \mathrm{S}y = x$ by
4: $\mathrm{Q}(\mathrm{S}y) \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$
10: $\neg\, \mathrm{S}y = x \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Q}(\mathrm{S}y) \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$

12: $\neg\ \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}y$ by

5: $\mathrm{Q}y \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$

9: $\neg\ \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}y \quad \vee \quad \neg\ \mathrm{Q}y \leq \mathrm{Q}(\mathrm{S}y)$

13: $x \leq y$ by

11: $\neg\ \mathrm{S}y = x$

8: $x \leq y \quad \vee \quad \mathrm{S}y = x$

14: $\neg\ x \leq y$ by

12: $\neg\ \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}y$

0: $\neg\ x \leq y \quad \vee \quad \mathrm{Q}x \leq \mathrm{Q}y$

15: QEA by

13: $x \leq y$

14: $\neg\ x \leq y$