Proof of Theorem 270

The theorem to be proved is

$\mathrm{SR}x = \mathrm{Q}x \quad \rightarrow \quad \mathrm{QS}x = 2 \cdot \mathrm{Q}x$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = (\mathrm{Q}x)] \quad \& \quad [\neg\, (\mathrm{Q}(\mathrm{S}x)) = (2 \cdot (\mathrm{Q}x))]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\mathrm{S}(\mathrm{R}x) = \mathrm{Q}x$ from H:x

1: $\neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{Q}(\mathrm{S}x)$ from H:x

2: $(\mathrm{Q}x) + (\mathrm{R}x) = \mathrm{S}x$ from 166;x

3: $\mathrm{Q}x$ is a power of two from 166;x

4: 2 is a power of two from 190

5: $\neg$ 2 is a power of two $\vee$ $\neg$ $\mathrm{Q}x$ is a power of two $\vee$ $2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two from 177;2;$\mathrm{Q}x$

6: $\mathrm{S}((\mathrm{Q}x) + (\mathrm{R}x)) = (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x))$ from 12;$\mathrm{Q}x$;$\mathrm{R}x$

7: $(\mathrm{Q}x) + (\mathrm{Q}x) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ from 118;$\mathrm{Q}x$

8: $\neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two $\vee$ $0 < 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ from 269;$2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

9: $(2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ from 12;$2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

10: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ $\vee$ $\neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two $\vee$ $\neg\, 0 < 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ $\vee$ $2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{Q}(\mathrm{S}x)$ from 171;$\mathrm{S}x$;$2 \cdot (\mathrm{Q}x)$;0

Equality substitutions:

11: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{R}x) = \mathrm{Q}x \quad \vee \quad (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{Q}x) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

12: $\neg\, (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{R}x) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}((\mathrm{Q}x) + (\mathrm{R}x)) = (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{S}x) = (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x))$

13: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = 2 \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

14: $\neg\, (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{S}x) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

Inferences:

15: $(\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{Q}x) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ by

0: $\mathrm{S}(\mathrm{R}x) = \mathrm{Q}x$

11: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{R}x) = \mathrm{Q}x \quad \vee \quad (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{Q}x) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

16: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two $\vee \quad \neg\, 0 < 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ by

1: $\neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{Q}(\mathrm{S}x)$

10: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two $\vee \quad \neg\, 0 < 2 \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad 2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{Q}(\mathrm{S}x)$

17: $\neg\, \mathrm{S}((\mathrm{Q}x) + (\mathrm{R}x)) = (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) \quad \vee \quad (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

2: $(\mathrm{Q}x) + (\mathrm{R}x) = \mathrm{S}x$

12: $\neg\, (\mathrm{Q}x)+(\mathrm{R}x) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}((\mathrm{Q}x)+(\mathrm{R}x)) = (\mathrm{Q}x)+(\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) \quad \vee \quad (\mathrm{Q}x)+(\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

18: $\neg\, 2$ is a power of two $\vee \quad 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two by

3: $\mathrm{Q}x$ is a power of two

5: $\neg\, 2$ is a power of two $\vee \quad \neg\, \mathrm{Q}x$ is a power of two $\vee \quad 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two

19: $2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two by

4: 2 is a power of two

18: $\neg\, 2$ is a power of two $\vee \quad 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two

20: $(\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

6: $\mathrm{S}((\mathrm{Q}x) + (\mathrm{R}x)) = (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x))$

17: $\neg\, \mathrm{S}((\mathrm{Q}x) + (\mathrm{R}x)) = (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) \quad \vee \quad (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

21: $(\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ by

7: $(\mathrm{Q}x) + (\mathrm{Q}x) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

15: $(\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{Q}x) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

22: $(2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

9: $(2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

13: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = 2 \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

23: $0 < 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ by

19: $2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two

8: $\neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two $\vee \quad 0 < 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

24: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, 0 < 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ by

19: $2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two

16: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$ is a power of two $\vee \quad \neg\, 0 < 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

25: $\neg\, (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad 2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

20: $(\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

14: $\neg\, (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad 2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

26: $2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

21: $(\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

25: $\neg\, (\mathrm{Q}x) + (\mathrm{S}(\mathrm{R}x)) = 2 \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad 2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

27: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

23: $0 < 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

24: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, 0 < 2 \cdot (\mathrm{Q}x)$

28: $(2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

26: $2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

22: $(2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

29: QEA by

27: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

28: $(2 \cdot (\mathrm{Q}x)) + 0 = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$