Proof of Theorem 266

The theorem to be proved is

$x \leq y \quad \rightarrow \quad 2 \cdot x \leq 2 \cdot y$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $\quad [[(x) \leq (y)] \quad \& \quad [\neg\, (2 \cdot x) \leq (2 \cdot y)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $x \leq y$ from H:x:y

1: $\neg\, 2 \cdot x \leq 2 \cdot y$ from H:x:y

2: $2 \cdot x = x + x$ from 118;x

3: $2 \cdot y = y + y$ from 118;y

4: $\neg\, x \leq y \quad \vee \quad \neg\, x \leq y \quad \vee \quad x + x \leq y + y$ from 184;x;y;x;y

Equality substitutions:

5: $\neg\, 2 \cdot x = x + x \quad \vee \quad 2 \cdot x \leq 2 \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x + x \leq 2 \cdot y$

6: $\neg\, 2 \cdot y = y + y \quad \vee \quad x + x \leq 2 \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x + x \leq y + y$

Inferences:

7: $x + x \leq y + y$ by
0: $x \leq y$
4: $\neg\, x \leq y \quad \vee \quad \neg\, x \leq y \quad \vee \quad x + x \leq y + y$

8: $\neg\, 2 \cdot x = x + x \quad \vee \quad \neg\, x + x \leq 2 \cdot y$ by
1: $\neg\, 2 \cdot x \leq 2 \cdot y$
5: $\neg\, 2 \cdot x = x + x \quad \vee \quad 2 \cdot x \leq 2 \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x + x \leq 2 \cdot y$

9: $\neg\, x + x \leq 2 \cdot y$ by
2: $2 \cdot x = x + x$
8: $\neg\, 2 \cdot x = x + x \quad \vee \quad \neg\, x + x \leq 2 \cdot y$

10: $x + x \leq 2 \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x + x \leq y + y$ by
3: $2 \cdot y = y + y$
6: $\neg\, 2 \cdot y = y + y \quad \vee \quad x + x \leq 2 \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x + x \leq y + y$

11: $x + x \leq 2 \cdot y$ by

7: $x + x \leq y + y$

10: $x + x \leq 2 \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x + x \leq y + y$

12: QEA by

9: $\neg\, x + x \leq 2 \cdot y$

11: $x + x \leq 2 \cdot y$