Proof of Theorem 262

The theorem to be proved is

$x \leq \mathrm{S}y \quad \rightarrow \quad x \leq y \quad \vee \quad x = \mathrm{S}y$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x) \leq (\mathrm{S}y)] \quad \& \quad [\neg\, (x) \leq (y)] \quad \& \quad [\neg\, (x) = (\mathrm{S}y)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $x \leq \mathrm{S}y$ from H:x:y

1: $\neg\, x \leq y$ from H:x:y

2: $\neg\, \mathrm{S}y = x$ from H:x:y

3: $\neg\, x \leq \mathrm{S}y \quad \vee \quad x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y$ from 68;x;Sy

4: $(\mathrm{S}y) - x = 0 \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x$ from 22;$(\mathrm{S}y) - x$

5: $x + 0 = x$ from 12;x;$\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)$

6: $\mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)))$ from 12;x;$\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)$

7: $\neg\, \mathrm{S}(x+(\mathrm{P}((\mathrm{S}y)-x))) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad x+(\mathrm{P}((\mathrm{S}y)-x)) = y$ from 4;y;$x+(\mathrm{P}((\mathrm{S}y)-x))$

8: $x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))$ from 71;x;$\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)$

Equality substitutions:

9: $\neg\, (\mathrm{S}y) - x = 0 \quad \vee \quad \neg\, x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad x + (0) = \mathrm{S}y$

10: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y)-x)) = (\mathrm{S}y)-x \quad \vee \quad x+(\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y)-x))) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, x+((\mathrm{S}y)-x) = \mathrm{S}y$

11: $\neg\, x + 0 = x \quad \vee \quad \neg\, x + 0 = \mathrm{S}y \quad \vee \quad x = \mathrm{S}y$

12: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) \quad \vee \quad \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$

13: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) \quad \vee \quad x \leq y$

Inferences:

14: $x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y$ by

0: $x \leq \mathrm{S}y$

3: $\neg\, x \leq \mathrm{S}y \quad \vee \quad x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y$

15: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))$ by

1: $\neg\, x \leq y$

13: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) \quad \vee \quad x \leq y$

16: $\neg\, x + 0 = x \quad \vee \quad \neg\, x + 0 = \mathrm{S}y$ by

2: $\neg\, \mathrm{S}y = x$

11: $\neg\, x + 0 = x \quad \vee \quad \neg\, x + 0 = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \mathrm{S}y = x$

17: $\neg\, x + 0 = \mathrm{S}y$ by

5: $x + 0 = x$

16: $\neg\, x + 0 = x \quad \vee \quad \neg\, x + 0 = \mathrm{S}y$

18: $\mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$ by

6: $\mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)))$

12: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) \quad \vee \quad \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$

19: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y$ by

8: $x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))$

15: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))$

20: $\neg\, (\mathrm{S}y) - x = 0 \quad \vee \quad x + 0 = \mathrm{S}y$ by

14: $x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y$

9: $\neg\, (\mathrm{S}y) - x = 0 \quad \vee \quad \neg\, x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad x + 0 = \mathrm{S}y$

21: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x \quad \vee \quad x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$ by

14: $x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y$

10: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y)-x)) = (\mathrm{S}y)-x \quad \vee \quad x+(\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y)-x))) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, x+((\mathrm{S}y)-x) = \mathrm{S}y$

22: $\neg\, (\mathrm{S}y) - x = 0$ by

17: $\neg\, x + 0 = \mathrm{S}y$

20: $\neg\, (\mathrm{S}y) - x = 0 \quad \vee \quad x + 0 = \mathrm{S}y$

23: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$ by

19: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y$

7: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y$

24: $\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x$ by

22: $\neg\, (\mathrm{S}y) - x = 0$

4: $(\mathrm{S}y) - x = 0 \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x$

25: $\neg\, x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$ by

23: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$

18: $\mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$

26: $x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$ by

24: $\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x$

21: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x \quad \vee \quad x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$

27: QEA by

25: $\neg\, x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$

26: $x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$