Proof of Theorem 257

The theorem to be proved is

$x < x \oplus \underline{1}$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[\neg\ (x) < (x \oplus \underline{1})]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\neg\ x < x \oplus \underline{1}$ from H:x

1: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{Q}\underline{1})) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1}$ from 172;x;$\underline{1}$

2: $\mathrm{Q}\underline{1} = 2$ from 192

3: $\mathrm{R}\underline{1} = 1$ from 192

4: $((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 1 = \mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)$ from 256;$(\mathrm{S}x) \cdot 2$

5: $\mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)) = (\mathrm{S}x) \cdot 2$ from 16;$(\mathrm{S}x) \cdot 2$

6: $(\mathrm{S}x) \cdot 2 = 2 \cdot (\mathrm{S}x)$ from 105;$\mathrm{S}x$;2

7: $(\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = 2 \cdot (\mathrm{S}x)$ from 118;$\mathrm{S}x$

8: $x < \mathrm{S}x$ from 125;x

9: $\mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x)$ from 71;$\mathrm{S}x$;$\mathrm{S}x$

10: $\neg\ x < \mathrm{S}x \ \vee\ \neg\ \mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) \ \vee\ x < (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x)$ from 144;x;$\mathrm{S}x$;$\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x$

Equality substitutions:

11: $\neg\ \mathrm{Q}\underline{1} = 2 \ \vee\ \neg\ \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{Q}\underline{1})) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1} \ \vee\ \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot (2)) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1}$

12: $\neg\ \mathrm{R}\underline{1} = 1 \ \vee\ \neg\ \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1} \ \vee\ \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + (1)) = x \oplus \underline{1}$

13: $\neg\ ((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 1 = \mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2) \ \vee\ \neg\ \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 1) = x \oplus \underline{1} \ \vee\ \mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)) = x \oplus \underline{1}$

14: $\neg\ \mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)) = (\mathrm{S}x) \cdot 2 \ \vee\ \neg\ \mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)) = x \oplus \underline{1} \ \vee\ (\mathrm{S}x) \cdot 2 = x \oplus \underline{1}$

15: $\neg\ (\mathrm{S}x) \cdot 2 = 2 \cdot (\mathrm{S}x) \ \vee\ \neg\ (\mathrm{S}x) \cdot 2 = x \oplus \underline{1} \ \vee\ 2 \cdot (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1}$

16: $\neg\ (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = 2 \cdot (\mathrm{S}x) \ \vee\ (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1} \ \vee\ \neg\ 2 \cdot (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1}$

17: $\neg\ (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1} \ \vee\ \neg\ x < (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) \ \vee\ x < x \oplus \underline{1}$

Inferences:

18: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad \neg\, x < (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x)$ by

0: $\neg\, x < x \oplus \underline{1}$

17: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad \neg\, x < (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad x < x \oplus \underline{1}$

19: $\neg\, \mathrm{Q}\underline{1} = 2 \quad \vee \quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1}$ by

1: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{Q}\underline{1})) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1}$

11: $\neg\, \mathrm{Q}\underline{1} = 2 \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{Q}\underline{1})) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1}$

20: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1}$ by

2: $\mathrm{Q}\underline{1} = 2$

19: $\neg\, \mathrm{Q}\underline{1} = 2 \quad \vee \quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1}$

21: $\neg\, \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 1) = x \oplus \underline{1}$ by

3: $\mathrm{R}\underline{1} = 1$

12: $\neg\, \mathrm{R}\underline{1} = 1 \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + (\mathrm{R}\underline{1})) = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 1) = x \oplus \underline{1}$

22: $\neg\, \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 1) = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad \mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)) = x \oplus \underline{1}$ by

4: $((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 1 = \mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)$

13: $\neg\, ((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 1 = \mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 1) = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad \mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)) = x \oplus \underline{1}$

23: $\neg\, \mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)) = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) \cdot 2 = x \oplus \underline{1}$ by

5: $\mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)) = (\mathrm{S}x) \cdot 2$

14: $\neg\, \mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)) = (\mathrm{S}x) \cdot 2 \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) \cdot 2)) = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) \cdot 2 = x \oplus \underline{1}$

24: $\neg\, (\mathrm{S}x) \cdot 2 = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad 2 \cdot (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1}$ by

6: $(\mathrm{S}x) \cdot 2 = 2 \cdot (\mathrm{S}x)$

15: $\neg\, (\mathrm{S}x) \cdot 2 = 2 \cdot (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{S}x) \cdot 2 = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad 2 \cdot (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1}$

25: $(\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1}$ by

7: $(\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = 2 \cdot (\mathrm{S}x)$

16: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = 2 \cdot (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1} \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{S}x) = x \oplus \underline{1}$

26: $\neg\, \mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad x < (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x)$ by

8: $x < \mathrm{S}x$

10: $\neg\, x < \mathrm{S}x \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad x < (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x)$

27: $x < (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x)$ by

9: $\mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x)$

26: $\neg\, \mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad x < (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x)$

28: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+1)=x\oplus\underline{1}$ by

20: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+(\mathrm{R}\underline{1}))=x\oplus\underline{1}$

21: $\neg\,\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+(\mathrm{R}\underline{1}))=x\oplus\underline{1} \quad\vee\quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+1)=x\oplus\underline{1}$

29: $\neg\,(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x)=x\oplus\underline{1}$ by

27: $x<(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x)$

18: $\neg\,(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x)=x\oplus\underline{1} \quad\vee\quad \neg\,x<(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x)$

30: $\mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x)\cdot 2))=x\oplus\underline{1}$ by

28: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+1)=x\oplus\underline{1}$

22: $\neg\,\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+1)=x\oplus\underline{1} \quad\vee\quad \mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x)\cdot 2))=x\oplus\underline{1}$

31: $\neg\,2\cdot(\mathrm{S}x)=x\oplus\underline{1}$ by

29: $\neg\,(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x)=x\oplus\underline{1}$

25: $(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x)=x\oplus\underline{1} \quad\vee\quad \neg\,2\cdot(\mathrm{S}x)=x\oplus\underline{1}$

32: $(\mathrm{S}x)\cdot 2=x\oplus\underline{1}$ by

30: $\mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x)\cdot 2))=x\oplus\underline{1}$

23: $\neg\,\mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x)\cdot 2))=x\oplus\underline{1} \quad\vee\quad (\mathrm{S}x)\cdot 2=x\oplus\underline{1}$

33: $\neg\,(\mathrm{S}x)\cdot 2=x\oplus\underline{1}$ by

31: $\neg\,2\cdot(\mathrm{S}x)=x\oplus\underline{1}$

24: $\neg\,(\mathrm{S}x)\cdot 2=x\oplus\underline{1} \quad\vee\quad 2\cdot(\mathrm{S}x)=x\oplus\underline{1}$

34: QEA by

32: $(\mathrm{S}x)\cdot 2=x\oplus\underline{1}$

33: $\neg\,(\mathrm{S}x)\cdot 2=x\oplus\underline{1}$