Proof of Theorem 255

The theorem to be proved is

$x < x \oplus \underline{0}$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[\neg\,(x) < (x \oplus \underline{0})]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\neg\, x < x \oplus \underline{0}$ from H:x

1: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{Q}\underline{0})) + (\mathrm{R}\underline{0})) = x \oplus \underline{0}$ from 172;x;$\underline{0}$

2: $\mathrm{Q}\underline{0} = 2$ from 191

3: $\mathrm{R}\underline{0} = 0$ from 191

4: $((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 0 = (\mathrm{S}x) \cdot 2$ from 12;$(\mathrm{S}x) \cdot 2$

5: $(\mathrm{S}x) \cdot 2 = 2 \cdot (\mathrm{S}x)$ from 105;$\mathrm{S}x$;2

6: $(\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = 2 \cdot (\mathrm{S}x)$ from 118;$\mathrm{S}x$

7: $\mathrm{S}((\mathrm{S}x) + x) = (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x)$ from 12;$\mathrm{S}x$;x

8: $\mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) + x)) = (\mathrm{S}x) + x$ from 16;$(\mathrm{S}x) + x$

9: $\mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + x$ from 71;$\mathrm{S}x$;x

10: $x < \mathrm{S}x$ from 125;x

11: $\neg\, x < \mathrm{S}x \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + x \quad \vee \quad x < (\mathrm{S}x) + x$ from 144;x;$\mathrm{S}x$;$(\mathrm{S}x) + x$

Equality substitutions:

12: $\neg\, \mathrm{Q}\underline{0} = 2 \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{Q}\underline{0})) + (\mathrm{R}\underline{0})) = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot (2)) + (\mathrm{R}\underline{0})) = x \oplus \underline{0}$

13: $\neg\, \mathrm{R}\underline{0} = 0 \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + (\mathrm{R}\underline{0})) = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + (0)) = x \oplus \underline{0}$

14: $\neg\, ((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 0 = (\mathrm{S}x) \cdot 2 \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}(((\mathrm{S}x) \cdot 2) + 0) = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \mathrm{P}((\mathrm{S}x) \cdot 2) = x \oplus \underline{0}$

15: $\neg\, (\mathrm{S}x) \cdot 2 = 2 \cdot (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}((\mathrm{S}x) \cdot 2) = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \mathrm{P}(2 \cdot (\mathrm{S}x)) = x \oplus \underline{0}$

16: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) = 2 \cdot (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + x) = (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + x) = 2 \cdot (\mathrm{S}x)$

17: $\neg\, \mathrm{P}(2 \cdot (\mathrm{S}x)) = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}(2 \cdot (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) + x \quad \vee \quad x \oplus \underline{0} = (\mathrm{S}x) + x$

18: $\neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + x) = 2 \cdot (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x) + x)) = (\mathrm{S}x) + x \quad \vee \quad \mathrm{P}(2 \cdot (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) + x$

19: $\neg\,(\mathrm{S}x)+x=x\oplus\underline{0} \quad\vee\quad \neg\,x<(\mathrm{S}x)+x \quad\vee\quad x<x\oplus\underline{0}$

Inferences:

20: $\neg\,(\mathrm{S}x)+x=x\oplus\underline{0} \quad\vee\quad \neg\,x<(\mathrm{S}x)+x$ by
0: $\neg\,x<x\oplus\underline{0}$
19: $\neg\,(\mathrm{S}x)+x=x\oplus\underline{0} \quad\vee\quad \neg\,x<(\mathrm{S}x)+x \quad\vee\quad x<x\oplus\underline{0}$

21: $\neg\,\mathrm{Q}\underline{0}=2 \quad\vee\quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+(\mathrm{R}\underline{0}))=x\oplus\underline{0}$ by
1: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot(\mathrm{Q}\underline{0}))+(\mathrm{R}\underline{0}))=x\oplus\underline{0}$
12: $\neg\,\mathrm{Q}\underline{0}=2 \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot(\mathrm{Q}\underline{0}))+(\mathrm{R}\underline{0}))=x\oplus\underline{0} \quad\vee\quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+(\mathrm{R}\underline{0}))=x\oplus\underline{0}$

22: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+(\mathrm{R}\underline{0}))=x\oplus\underline{0}$ by
2: $\mathrm{Q}\underline{0}=2$
21: $\neg\,\mathrm{Q}\underline{0}=2 \quad\vee\quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+(\mathrm{R}\underline{0}))=x\oplus\underline{0}$

23: $\neg\,\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+(\mathrm{R}\underline{0}))=x\oplus\underline{0} \quad\vee\quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+0)=x\oplus\underline{0}$ by
3: $\mathrm{R}\underline{0}=0$
13: $\neg\,\mathrm{R}\underline{0}=0 \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+(\mathrm{R}\underline{0}))=x\oplus\underline{0} \quad\vee\quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+0)=x\oplus\underline{0}$

24: $\neg\,\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+0)=x\oplus\underline{0} \quad\vee\quad \mathrm{P}((\mathrm{S}x)\cdot 2)=x\oplus\underline{0}$ by
4: $((\mathrm{S}x)\cdot 2)+0=(\mathrm{S}x)\cdot 2$
14: $\neg\,((\mathrm{S}x)\cdot 2)+0=(\mathrm{S}x)\cdot 2 \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2)+0)=x\oplus\underline{0} \quad\vee\quad \mathrm{P}((\mathrm{S}x)\cdot 2)=x\oplus\underline{0}$

25: $\neg\,\mathrm{P}((\mathrm{S}x)\cdot 2)=x\oplus\underline{0} \quad\vee\quad \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x))=x\oplus\underline{0}$ by
5: $(\mathrm{S}x)\cdot 2=2\cdot(\mathrm{S}x)$
15: $\neg\,(\mathrm{S}x)\cdot 2=2\cdot(\mathrm{S}x) \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{P}((\mathrm{S}x)\cdot 2)=x\oplus\underline{0} \quad\vee\quad \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x))=x\oplus\underline{0}$

26: $\neg\,\mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x)=(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x) \quad\vee\quad \mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x)=2\cdot(\mathrm{S}x)$ by
6: $(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x)=2\cdot(\mathrm{S}x)$
16: $\neg\,(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x)=2\cdot(\mathrm{S}x) \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x)=(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x) \quad\vee\quad \mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x)=2\cdot(\mathrm{S}x)$

27: $\mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x)=2\cdot(\mathrm{S}x)$ by
7: $\mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x)=(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x)$
26: $\neg\,\mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x)=(\mathrm{S}x)+(\mathrm{S}x) \quad\vee\quad \mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x)=2\cdot(\mathrm{S}x)$

28: $\neg\,\mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x)=2\cdot(\mathrm{S}x) \quad\vee\quad \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x))=(\mathrm{S}x)+x$ by
8: $\mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x))=(\mathrm{S}x)+x$
18: $\neg\,\mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x)=2\cdot(\mathrm{S}x) \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{P}(\mathrm{S}((\mathrm{S}x)+x))=(\mathrm{S}x)+x \quad\vee\quad \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x))=(\mathrm{S}x)+x$

29: $\neg\,x<\mathrm{S}x \quad\vee\quad x<(\mathrm{S}x)+x$ by
9: $\mathrm{S}x\leq(\mathrm{S}x)+x$
11: $\neg\,x<\mathrm{S}x \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{S}x\leq(\mathrm{S}x)+x \quad\vee\quad x<(\mathrm{S}x)+x$

30: $x < (\mathrm{S}x) + x$ by

10: $x < \mathrm{S}x$

29: $\neg\, x < \mathrm{S}x \quad \vee \quad x < (\mathrm{S}x) + x$

31: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2) + 0) = x \oplus \underline{0}$ by

22: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2) + (\mathrm{R}\underline{0})) = x \oplus \underline{0}$

23: $\neg\, \mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2) + (\mathrm{R}\underline{0})) = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2) + 0) = x \oplus \underline{0}$

32: $\mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) + x$ by

27: $\mathrm{S}((\mathrm{S}x) + x) = 2\cdot(\mathrm{S}x)$

28: $\neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + x) = 2\cdot(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) + x$

33: $\neg\, (\mathrm{S}x) + x = x \oplus \underline{0}$ by

30: $x < (\mathrm{S}x) + x$

20: $\neg\, (\mathrm{S}x) + x = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \neg\, x < (\mathrm{S}x) + x$

34: $\mathrm{P}((\mathrm{S}x)\cdot 2) = x \oplus \underline{0}$ by

31: $\mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2) + 0) = x \oplus \underline{0}$

24: $\neg\, \mathrm{P}(((\mathrm{S}x)\cdot 2) + 0) = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \mathrm{P}((\mathrm{S}x)\cdot 2) = x \oplus \underline{0}$

35: $\neg\, \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) + x = x \oplus \underline{0}$ by

32: $\mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) + x$

17: $\neg\, \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) + x \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) + x = x \oplus \underline{0}$

36: $\neg\, \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = x \oplus \underline{0}$ by

33: $\neg\, (\mathrm{S}x) + x = x \oplus \underline{0}$

35: $\neg\, \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) + x = x \oplus \underline{0}$

37: $\mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = x \oplus \underline{0}$ by

34: $\mathrm{P}((\mathrm{S}x)\cdot 2) = x \oplus \underline{0}$

25: $\neg\, \mathrm{P}((\mathrm{S}x)\cdot 2) = x \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = x \oplus \underline{0}$

38: QEA by

36: $\neg\, \mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = x \oplus \underline{0}$

37: $\mathrm{P}(2\cdot(\mathrm{S}x)) = x \oplus \underline{0}$