Proof of Theorem 248

The theorem to be proved is

$x \neq \epsilon \quad \& \quad \text{Parity}\,\text{R}x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{R}(\text{Chop}\,x \oplus \underline{0}) = \text{R}x$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[\neg\,(x) = (\epsilon)] \quad \& \quad [(\text{Parity}(\text{R}x)) = (0)] \quad \& \quad [\neg\,(\text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0})) = (\text{R}x)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\neg\,\epsilon = x$ from H:x

1: $\text{Parity}(\text{R}x) = 0$ from H:x

2: $\neg\,\text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0}) = \text{R}x$ from H:x

3: $\epsilon = x \quad \vee \quad \text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0}) = (\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2$ from 247;x

4: $\text{Half}((\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2) = \text{Half}(\text{R}x)$ from 241;Half(Rx)

5: $\text{Parity}((\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2) = 0$ from 213;Half(Rx)

6: $\neg\,\text{Parity}(\text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0})) = \text{Parity}(\text{R}x) \quad \vee \quad \neg\,\text{Half}(\text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0})) = \text{Half}(\text{R}x) \quad \vee \quad \text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0}) = \text{R}x$ from 246;R((Chop$x$) ⊕ 0);Rx

Equality substitutions:

7: $\neg\,\text{Parity}(\text{R}x) = 0 \quad \vee \quad \text{Parity}((\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2) = \text{Parity}(\text{R}x) \quad \vee \quad \neg\,\text{Parity}((\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2) = 0$

8: $\neg\,\text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0}) = (\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2 \quad \vee \quad \text{Parity}(\text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0})) = \text{Parity}(\text{R}x) \quad \vee \quad \neg\,\text{Parity}((\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2) = \text{Parity}(\text{R}x)$

9: $\neg\,\text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0}) = (\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2 \quad \vee \quad \text{Half}(\text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0})) = \text{Half}(\text{R}x) \quad \vee \quad \neg\,\text{Half}((\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2) = \text{Half}(\text{R}x)$

Inferences:

10: $\text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0}) = (\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2$ by

0: $\neg\,\epsilon = x$

3: $\epsilon = x \quad \vee \quad \text{R}((\text{Chop}x) \oplus \underline{0}) = (\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2$

11: $\text{Parity}((\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2) = \text{Parity}(\text{R}x) \quad \vee \quad \neg\,\text{Parity}((\text{Half}(\text{R}x)) \cdot 2) = 0$ by

1: $\text{Parity}(\text{R}x) = 0$

7: $\neg\,\mathrm{Parity}(\mathrm{R}x) = 0 \;\vee\; \mathrm{Parity}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x) \;\vee\; \neg\,\mathrm{Parity}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = 0$

12: $\neg\,\mathrm{Parity}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x) \;\vee\; \neg\,\mathrm{Half}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Half}(\mathrm{R}x)$ by

2: $\neg\,\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0}) = \mathrm{R}x$

6: $\neg\,\mathrm{Parity}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x) \;\vee\; \neg\,\mathrm{Half}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Half}(\mathrm{R}x) \;\vee\; \mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0}) = \mathrm{R}x$

13: $\neg\,\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0}) = (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2 \;\vee\; \mathrm{Half}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Half}(\mathrm{R}x)$ by

4: $\mathrm{Half}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = \mathrm{Half}(\mathrm{R}x)$

9: $\neg\,\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0}) = (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2 \;\vee\; \mathrm{Half}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Half}(\mathrm{R}x) \;\vee\; \neg\,\mathrm{Half}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = \mathrm{Half}(\mathrm{R}x)$

14: $\mathrm{Parity}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x)$ by

5: $\mathrm{Parity}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = 0$

11: $\mathrm{Parity}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x) \;\vee\; \neg\,\mathrm{Parity}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = 0$

15: $\mathrm{Parity}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x) \;\vee\; \neg\,\mathrm{Parity}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x)$ by

10: $\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0}) = (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2$

8: $\neg\,\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0}) = (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2 \;\vee\; \mathrm{Parity}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x) \;\vee\; \neg\,\mathrm{Parity}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x)$

16: $\mathrm{Half}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Half}(\mathrm{R}x)$ by

10: $\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0}) = (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2$

13: $\neg\,\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0}) = (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2 \;\vee\; \mathrm{Half}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Half}(\mathrm{R}x)$

17: $\mathrm{Parity}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x)$ by

14: $\mathrm{Parity}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x)$

15: $\mathrm{Parity}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x) \;\vee\; \neg\,\mathrm{Parity}((\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))\cdot 2) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x)$

18: $\neg\,\mathrm{Parity}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x)$ by

16: $\mathrm{Half}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Half}(\mathrm{R}x)$

12: $\neg\,\mathrm{Parity}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x) \;\vee\; \neg\,\mathrm{Half}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Half}(\mathrm{R}x)$

19: QEA by

17: $\mathrm{Parity}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x)$

18: $\neg\,\mathrm{Parity}(\mathrm{R}((\mathrm{Chop}x)\oplus \underline{0})) = \mathrm{Parity}(\mathrm{R}x)$