Proof of Theorem 231

The theorem to be proved is

$x \neq \epsilon \quad \rightarrow \quad \mathrm{S\,Chop}\,x = \mathrm{Half\ Q}x + \mathrm{Half\ R}x$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[\neg\,(x) = (\epsilon)] \quad \& \quad [\neg\,(\mathrm{S}(\mathrm{Chop}x)) = ((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)))]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\neg\,\epsilon = x$ from H:x

1: $\neg\,(\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)) = \mathrm{S}(\mathrm{Chop}x)$ from H:x

2: $\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))) = \mathrm{Chop}x$ from 229;x

3: $\epsilon = x \quad \vee \quad \neg\,(\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)) = 0$ from 228;x

4: $(\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)) = 0 \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)))) = (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))$ from 22;$\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)$

Equality substitutions:

5: $\neg\,\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))) = \mathrm{Chop}x \quad \vee \quad \neg\,\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)))) = (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)) \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{Chop}x) = (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))$

Inferences:

6: $\neg\,(\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)) = 0$ by

0: $\neg\,\epsilon = x$

3: $\epsilon = x \quad \vee \quad \neg\,(\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)) = 0$

7: $\neg\,\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))) = \mathrm{Chop}x \quad \vee \quad \neg\,\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)))) = (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))$ by

1: $\neg\,(\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)) = \mathrm{S}(\mathrm{Chop}x)$

5: $\neg\,\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))) = \mathrm{Chop}x \quad \vee \quad \neg\,\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)))) = (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)) \quad \vee \quad (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)) = \mathrm{S}(\mathrm{Chop}x)$

8: $\neg\,\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)))) = (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))$ by

2: $\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))) = \mathrm{Chop}x$

7: $\neg\,\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))) = \mathrm{Chop}x \quad \vee \quad \neg\,\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)))) = (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))$

9: $\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)))) = (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))$ by

6: $\neg\ (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)) = 0$

4: $(\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)) = 0 \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)))) = (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))$

10: QEA by

8: $\neg\ \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)))) = (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))$

9: $\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x)))) = (\mathrm{Half}(\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{Half}(\mathrm{R}x))$