Proof of Theorem 223i

The theorem to be proved is

$p_{222}(x) \quad \rightarrow \quad p_{222}(\mathrm{S}x)$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[p_{222}(x)] \quad \& \quad [\neg\, p_{222}(\mathrm{S}x)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $p_{222}(x)$ from H:x

1: $\neg\, p_{222}(\mathrm{S}x)$ from H:x

2: $\mathrm{S}(\mathrm{S}0) = 2$ from 116

3: $\mathrm{S}0 = 1$ from 115

4: $\neg\, p_{222}(x) \;\vee\; \neg\, \mathrm{Parity}x = 0 \;\vee\; 2 \cdot (\mathrm{Half}x) = x$ from $222^{\rightarrow}$;x

5: $\neg\, p_{222}(x) \;\vee\; \neg\, \mathrm{Parity}x = 1 \;\vee\; (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1 = x$ from $222^{\rightarrow}$;x

6: $p_{222}(\mathrm{S}x) \;\vee\; \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 0 \;\vee\; \neg\, (2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x))) + 1 = \mathrm{S}x$ from $222^{\leftarrow}$;Sx

7: $p_{222}(\mathrm{S}x) \;\vee\; \neg\, 2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x)) = \mathrm{S}x \;\vee\; \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 1$ from $222^{\leftarrow}$;Sx

8: $\mathrm{Parity}x = 0 \;\vee\; \mathrm{Parity}x = 1$ from 209;x

9: $\neg\, \mathrm{S}0 = 0$ from 3;0

10: $(2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 0 = 2 \cdot (\mathrm{Half}x)$ from 12;$2 \cdot (\mathrm{Half}x)$;0

11: $\mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 0) = (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + (\mathrm{S}0)$ from 12;$2 \cdot (\mathrm{Half}x)$;0

12: $\neg\, \mathrm{Parity}x = 0 \;\vee\; \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 1$ from 206;x

13: $\neg\, \mathrm{Parity}x = 1 \;\vee\; \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 0$ from 207;x

14: $\neg\, \mathrm{Parity}x = 0 \;\vee\; \mathrm{Half}(\mathrm{S}x) = \mathrm{Half}x$ from 219;x

15: $\neg\, \mathrm{Parity}x = 1 \;\vee\; \mathrm{Half}(\mathrm{S}x) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$ from 220;x

16: $\mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + (\mathrm{S}1)$ from 12;$2 \cdot (\mathrm{Half}x)$;1

17: $(2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 2 = 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x))$ from 100;2;Half$x$

Equality substitutions:

18: $\neg\, \mathrm{S}0 = 1 \;\vee\; \neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}0) = 2 \;\vee\; \mathrm{S}(1) = 2$

19: $\neg\, \mathrm{S}0 = 1 \;\vee\; \mathrm{S}0 = 0 \;\vee\; \neg\, 1 = 0$

20: $\neg\, \mathrm{S0} = 1 \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 0) = (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + (\mathrm{S0}) \quad \vee \quad \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 0) = (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + (1)$

21: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1 = x \quad \vee \quad \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(x) = \mathrm{S}x$

22: $\neg\, \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 0 \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 1 \quad \vee \quad 0 = 1$

23: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 0 = 2 \cdot (\mathrm{Half}x) \quad \vee \quad (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 0 = x \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{Half}x) = x$

24: $\neg\, \mathrm{Half}(\mathrm{S}x) = \mathrm{Half}x \quad \vee \quad (2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x))) + 1 = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \neg\, (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1 = \mathrm{S}x$

25: $\neg\, \mathrm{Half}(\mathrm{S}x) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x) \quad \vee \quad 2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x)) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) = \mathrm{S}x$

26: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 2 = 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 2 \quad \vee \quad \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x))$

27: $\neg\, \mathrm{S1} = 2 \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + (\mathrm{S1}) \quad \vee \quad \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + (2)$

28: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 0 = x \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 0) = (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1 \quad \vee \quad \mathrm{S}(x) = (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1$

29: $\neg\, \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) \quad \vee \quad \mathrm{S}x = 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x))$

Inferences:

30: $\neg\, \mathrm{Parity}x = 0 \quad \vee \quad 2 \cdot (\mathrm{Half}x) = x$ by

0: $\mathrm{p}_{222}(x)$

4: $\neg\, \mathrm{p}_{222}(x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Parity}x = 0 \quad \vee \quad 2 \cdot (\mathrm{Half}x) = x$

31: $\neg\, \mathrm{Parity}x = 1 \quad \vee \quad (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1 = x$ by

0: $\mathrm{p}_{222}(x)$

5: $\neg\, \mathrm{p}_{222}(x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Parity}x = 1 \quad \vee \quad (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1 = x$

32: $\mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 0 \quad \vee \quad \neg\, (2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x))) + 1 = \mathrm{S}x$ by

1: $\neg\, \mathrm{p}_{222}(\mathrm{S}x)$

6: $\mathrm{p}_{222}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 0 \quad \vee \quad \neg\, (2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x))) + 1 = \mathrm{S}x$

33: $\neg\, 2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x)) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 1$ by

1: $\neg\, \mathrm{p}_{222}(\mathrm{S}x)$

7: $\mathrm{p}_{222}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x)) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 1$

34: $\neg$ S0 $=$ 1 $\vee$ S1 $=$ 2 by

2: S(S0) $=$ 2

18: $\neg$ S0 $=$ 1 $\vee$ $\neg$ S(S0) $=$ 2 $\vee$ S1 $=$ 2

35: S0 $=$ 0 $\vee$ $\neg$ 1 $=$ 0 by

3: S0 $=$ 1

19: $\neg$ S0 $=$ 1 $\vee$ S0 $=$ 0 $\vee$ $\neg$ 1 $=$ 0

36: $\neg$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ (S0) $\vee$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1 by

3: S0 $=$ 1

20: $\neg$ S0 $=$ 1 $\vee$ $\neg$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ (S0) $\vee$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1

37: S1 $=$ 2 by

3: S0 $=$ 1

34: $\neg$ S0 $=$ 1 $\vee$ S1 $=$ 2

38: $\neg$ 1 $=$ 0 by

9: $\neg$ S0 $=$ 0

35: S0 $=$ 0 $\vee$ $\neg$ 1 $=$ 0

39: (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0 $=$ x $\vee$ $\neg$ 2 $\cdot$ (Half$x$) $=$ x by

10: (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0 $=$ 2 $\cdot$ (Half$x$)

23: $\neg$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0 $=$ 2 $\cdot$ (Half$x$) $\vee$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0 $=$ x $\vee$ $\neg$ 2 $\cdot$ (Half$x$) $=$ x

40: S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1 by

11: S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ (S0)

36: $\neg$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ (S0) $\vee$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 0) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1

41: $\neg$ S1 $=$ 2 $\vee$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 2 by

16: S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ (S1)

27: $\neg$ S1 $=$ 2 $\vee$ $\neg$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ (S1) $\vee$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 2

42: $\neg$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 2 $\vee$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1) $=$ 2 $\cdot$ (S(Half$x$)) by

17: (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 2 $=$ 2 $\cdot$ (S(Half$x$))

26: $\neg$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 2 $=$ 2 $\cdot$ (S(Half$x$)) $\vee$ $\neg$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1) $=$ (2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 2 $\vee$ S((2 $\cdot$ (Half$x$)) $+$ 1) $=$ 2 $\cdot$ (S(Half$x$))

43: $\mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+1)=(2\cdot(\mathrm{Half}x))+2$ by

37: $\mathrm{S}1=2$

41: $\neg\,\mathrm{S}1=2 \quad\vee\quad \mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+1)=(2\cdot(\mathrm{Half}x))+2$

44: $\neg\,\mathrm{Parity}(\mathrm{S}x)=0 \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{Parity}(\mathrm{S}x)=1$ by

38: $\neg\,1=0$

22: $\neg\,\mathrm{Parity}(\mathrm{S}x)=0 \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{Parity}(\mathrm{S}x)=1 \quad\vee\quad 1=0$

45: $\neg\,(2\cdot(\mathrm{Half}x))+0=x \quad\vee\quad (2\cdot(\mathrm{Half}x))+1=\mathrm{S}x$ by

40: $\mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+0)=(2\cdot(\mathrm{Half}x))+1$

28: $\neg\,(2\cdot(\mathrm{Half}x))+0=x \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+0)=(2\cdot(\mathrm{Half}x))+1 \quad\vee\quad (2\cdot(\mathrm{Half}x))+1=\mathrm{S}x$

46: $\mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+1)=2\cdot(\mathrm{S}(\mathrm{Half}x))$ by

43: $\mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+1)=(2\cdot(\mathrm{Half}x))+2$

42: $\neg\,\mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+1)=(2\cdot(\mathrm{Half}x))+2 \quad\vee\quad \mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+1)=2\cdot(\mathrm{S}(\mathrm{Half}x))$

47: $\neg\,\mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+1)=\mathrm{S}x \quad\vee\quad 2\cdot(\mathrm{S}(\mathrm{Half}x))=\mathrm{S}x$ by

46: $\mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+1)=2\cdot(\mathrm{S}(\mathrm{Half}x))$

29: $\neg\,\mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+1)=\mathrm{S}x \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{S}((2\cdot(\mathrm{Half}x))+1)=2\cdot(\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) \quad\vee\quad 2\cdot(\mathrm{S}(\mathrm{Half}x))=\mathrm{S}x$

CLAIM: $\mathrm{Parity}x=1$ Suppose not. Then

48: $\neg\,\mathrm{Parity}x=1$

49: $\mathrm{Parity}x=0$ by

48: $\neg\,\mathrm{Parity}x=1$

8: $\mathrm{Parity}x=0 \quad\vee\quad \mathrm{Parity}x=1$

50: $\mathrm{Parity}(\mathrm{S}x)=1$ by

49: $\mathrm{Parity}x=0$

12: $\neg\,\mathrm{Parity}x=0 \quad\vee\quad \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x)=1$

51: $\mathrm{Half}(\mathrm{S}x)=\mathrm{Half}x$ by

49: $\mathrm{Parity}x=0$

14: $\neg\,\mathrm{Parity}x=0 \quad\vee\quad \mathrm{Half}(\mathrm{S}x)=\mathrm{Half}x$

52: $2\cdot(\mathrm{Half}x)=x$ by

49: $\mathrm{Parity}x=0$

30: $\neg\,\mathrm{Parity}x=0 \quad\vee\quad 2\cdot(\mathrm{Half}x)=x$

53: $\neg\, \text{Parity}(\text{S}x) = 0$ by

50: $\text{Parity}(\text{S}x) = 1$

44: $\neg\, \text{Parity}(\text{S}x) = 0 \;\vee\; \neg\, \text{Parity}(\text{S}x) = 1$

54: $(2 \cdot (\text{Half}(\text{S}x))) + 1 = \text{S}x \;\vee\; \neg\, (2 \cdot (\text{Half}x)) + 1 = \text{S}x$ by

51: $\text{Half}(\text{S}x) = \text{Half}x$

24: $\neg\, \text{Half}(\text{S}x) = \text{Half}x \;\vee\; (2 \cdot (\text{Half}(\text{S}x))) + 1 = \text{S}x \;\vee\; \neg\, (2 \cdot (\text{Half}x)) + 1 = \text{S}x$

55: $(2 \cdot (\text{Half}x)) + 0 = x$ by

52: $2 \cdot (\text{Half}x) = x$

39: $(2 \cdot (\text{Half}x)) + 0 = x \;\vee\; \neg\, 2 \cdot (\text{Half}x) = x$

56: $\neg\, (2 \cdot (\text{Half}(\text{S}x))) + 1 = \text{S}x$ by

53: $\neg\, \text{Parity}(\text{S}x) = 0$

32: $\text{Parity}(\text{S}x) = 0 \;\vee\; \neg\, (2 \cdot (\text{Half}(\text{S}x))) + 1 = \text{S}x$

57: $(2 \cdot (\text{Half}x)) + 1 = \text{S}x$ by

55: $(2 \cdot (\text{Half}x)) + 0 = x$

45: $\neg\, (2 \cdot (\text{Half}x)) + 0 = x \;\vee\; (2 \cdot (\text{Half}x)) + 1 = \text{S}x$

58: $\neg\, (2 \cdot (\text{Half}x)) + 1 = \text{S}x$ by

56: $\neg\, (2 \cdot (\text{Half}(\text{S}x))) + 1 = \text{S}x$

54: $(2 \cdot (\text{Half}(\text{S}x))) + 1 = \text{S}x \;\vee\; \neg\, (2 \cdot (\text{Half}x)) + 1 = \text{S}x$

59: $\text{Parity}x = 1$ The CLAIM is proved, and 48–58 will not be used after this:

57: $(2 \cdot (\text{Half}x)) + 1 = \text{S}x$

58: $\neg\, (2 \cdot (\text{Half}x)) + 1 = \text{S}x$

60: $\text{Parity}(\text{S}x) = 0$ by

59: $\text{Parity}x = 1$

13: $\neg\, \text{Parity}x = 1 \;\vee\; \text{Parity}(\text{S}x) = 0$

61: $\text{Half}(\text{S}x) = \text{S}(\text{Half}x)$ by

59: $\text{Parity}x = 1$

15: $\neg\, \text{Parity}x = 1 \;\vee\; \text{Half}(\text{S}x) = \text{S}(\text{Half}x)$

62: $(2 \cdot (\text{Half}x)) + 1 = x$ by

59: $\text{Parity}x = 1$

31: $\neg\, \text{Parity}x = 1 \;\vee\; (2 \cdot (\text{Half}x)) + 1 = x$

63: $\neg\, \text{Parity}(\text{S}x) = 1$ by

60: $\text{Parity}(\text{S}x) = 0$

44: $\neg\, \text{Parity}(\text{S}x) = 0 \;\vee\; \neg\, \text{Parity}(\text{S}x) = 1$

64: $2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x)) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) = \mathrm{S}x$ by

61: $\mathrm{Half}(\mathrm{S}x) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$

25: $\neg\, \mathrm{Half}(\mathrm{S}x) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x) \quad \vee \quad 2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x)) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) = \mathrm{S}x$

65: $\mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = \mathrm{S}x$ by

62: $(2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1 = x$

21: $\neg\, (2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1 = x \quad \vee \quad \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = \mathrm{S}x$

66: $\neg\, 2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x)) = \mathrm{S}x$ by

63: $\neg\, \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 1$

33: $\neg\, 2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x)) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \mathrm{Parity}(\mathrm{S}x) = 1$

67: $2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) = \mathrm{S}x$ by

65: $\mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = \mathrm{S}x$

47: $\neg\, \mathrm{S}((2 \cdot (\mathrm{Half}x)) + 1) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) = \mathrm{S}x$

68: $\neg\, 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) = \mathrm{S}x$ by

66: $\neg\, 2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x)) = \mathrm{S}x$

64: $2 \cdot (\mathrm{Half}(\mathrm{S}x)) = \mathrm{S}x \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) = \mathrm{S}x$

69: QEA by

67: $2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) = \mathrm{S}x$

68: $\neg\, 2 \cdot (\mathrm{S}(\mathrm{Half}x)) = \mathrm{S}x$