Proof of Theorem 220

The theorem to be proved is

$\text{Parity}\, x = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Half S}x = \text{S Half}\, x$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(\text{Parity}x) = (1)] \quad \& \quad [\neg\, (\text{Half}(\text{S}x)) = (\text{S}(\text{Half}x))]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\text{Parity}x = 1$ from H:x

1: $\neg\, \text{Half}(\text{S}x) = \text{S}(\text{Half}x)$ from H:x

2: $\text{S0} = 1$ from 115

3: $\text{C}((\text{Parity}x, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{Half}(\text{S}x)$ from 218;x

4: $\text{C}((\text{S0}, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{S}(\text{Half}x)$ from 33;Half$x$;S(Half$x$);0

Equality substitutions:

5: $\neg\, \text{Parity}x = 1 \ \vee\ \neg\, \text{C}((\text{Parity}x, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{Half}(\text{S}x) \ \vee\ \text{C}((1, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{Half}(\text{S}x)$

6: $\neg\, \text{S0} = 1 \ \vee\ \neg\, \text{C}((\text{S0}, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{S}(\text{Half}x) \ \vee\ \text{C}((1, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{S}(\text{Half}x)$

7: $\neg\, \text{C}((1, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{Half}(\text{S}x) \ \vee\ \neg\, \text{C}((1, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{S}(\text{Half}x) \ \vee\ \text{Half}(\text{S}x) = \text{S}(\text{Half}x)$

Inferences:

8: $\neg\, \text{C}((\text{Parity}x, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{Half}(\text{S}x) \ \vee\ \text{C}((1, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{Half}(\text{S}x)$
by

0: $\text{Parity}x = 1$

5: $\neg\, \text{Parity}x = 1 \ \vee\ \neg\, \text{C}((\text{Parity}x, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{Half}(\text{S}x) \ \vee\ \text{C}((1, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{Half}(\text{S}x)$

9: $\neg\, \text{C}((1, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{Half}(\text{S}x) \ \vee\ \neg\, \text{C}((1, \text{Half}x, \text{S}(\text{Half}x))) = \text{S}(\text{Half}x)$
by

1: $\neg\, \text{Half}(\text{S}x) = \text{S}(\text{Half}x)$

7: $\neg$ $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{Half}(\mathrm{S}x)$ $\vee$ $\neg$ $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$ $\vee$ $\mathrm{Half}(\mathrm{S}x) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$

10: $\neg$ $\mathrm{C}((\mathrm{S}0, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$ $\vee$ $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$ by

2: $\mathrm{S}0 = 1$

6: $\neg$ $\mathrm{S}0 = 1$ $\vee$ $\neg$ $\mathrm{C}((\mathrm{S}0, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$ $\vee$ $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$

11: $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{Half}(\mathrm{S}x)$ by

3: $\mathrm{C}((\mathrm{Parity}x, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{Half}(\mathrm{S}x)$

8: $\neg$ $\mathrm{C}((\mathrm{Parity}x, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{Half}(\mathrm{S}x)$ $\vee$ $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{Half}(\mathrm{S}x)$

12: $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$ by

4: $\mathrm{C}((\mathrm{S}0, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$

10: $\neg$ $\mathrm{C}((\mathrm{S}0, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$ $\vee$ $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$

13: $\neg$ $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$ by

11: $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{Half}(\mathrm{S}x)$

9: $\neg$ $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{Half}(\mathrm{S}x)$ $\vee$ $\neg$ $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$

14: QEA by

12: $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$

13: $\neg$ $\mathrm{C}((1, \mathrm{Half}x, \mathrm{S}(\mathrm{Half}x))) = \mathrm{S}(\mathrm{Half}x)$