Proof of Theorem 202

The theorem to be proved is

$x \cdot y = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \& \quad y = 1$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x \cdot y) = (1)] \quad \& \quad [\neg\,(x) = (1) \quad \vee \quad \neg\,(y) = (1)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $x \cdot y = 1$ from H:x:y

1: $\neg\, 1 = x \quad \vee \quad \neg\, 1 = y$ from H:x:y

2: $\mathrm{S}0 = 1$ from 115

3: $0 \cdot y = 0$ from 103;y

4: $y \cdot x = x \cdot y$ from 105;x;y

5: $0 \cdot x = 0$ from 103;x

6: $0 = x \quad \vee \quad y \leq x \cdot y$ from 201;x;y

7: $0 = y \quad \vee \quad x \leq y \cdot x$ from 201;y;x

8: $\neg\, x \leq 1 \quad \vee \quad 0 = x \quad \vee \quad 1 = x$ from 200;x

9: $\neg\, y \leq 1 \quad \vee \quad 0 = y \quad \vee \quad 1 = y$ from 200;y

10: $\neg\, \mathrm{S}0 = 0$ from 3;0

Equality substitutions:

11: $\neg\, x \cdot y = 1 \quad \vee \quad \neg\, y \cdot x = x \cdot y \quad \vee \quad y \cdot x = 1$

12: $\neg\, x \cdot y = 1 \quad \vee \quad \neg\, y \leq x \cdot y \quad \vee \quad y \leq 1$

13: $\neg\, x \cdot y = 1 \quad \vee \quad \neg\, x \cdot y = 0 \quad \vee \quad 1 = 0$

14: $\neg\, \mathrm{S}0 = 1 \quad \vee \quad \mathrm{S}0 = 0 \quad \vee \quad \neg\, 1 = 0$

15: $\neg\, y \cdot x = 1 \quad \vee \quad \neg\, x \leq y \cdot x \quad \vee \quad x \leq 1$

16: $\neg\, y \cdot x = 1 \quad \vee \quad \neg\, y \cdot x = 0 \quad \vee \quad 1 = 0$

17: $\neg\; x = 0 \quad \vee \quad (x) \cdot y = 0 \quad \vee \quad \neg\; (0) \cdot y = 0$

18: $\neg\ y = 0 \quad \vee \quad (y) \cdot x = 0 \quad \vee \quad \neg\ (0) \cdot x = 0$

Inferences:

19: $\neg\, y \cdot x = x \cdot y \quad \vee \quad y \cdot x = 1$ by

0: $x \cdot y = 1$

11: $\neg\, x \cdot y = 1 \quad \vee \quad \neg\, y \cdot x = x \cdot y \quad \vee \quad y \cdot x = 1$

20: $\neg\, y \leq x \cdot y \quad \vee \quad y \leq 1$ by

0: $x \cdot y = 1$

12: $\neg\, x \cdot y = 1 \quad \vee \quad \neg\, y \leq x \cdot y \quad \vee \quad y \leq 1$

21: $\neg\, x \cdot y = 0 \quad \vee \quad 1 = 0$ by

0: $x \cdot y = 1$

13: $\neg\, x \cdot y = 1 \quad \vee \quad \neg\, x \cdot y = 0 \quad \vee \quad 1 = 0$

22: $\mathrm{S}0 = 0 \quad \vee \quad \neg\, 1 = 0$ by

2: $\mathrm{S}0 = 1$

14: $\neg\, \mathrm{S}0 = 1 \quad \vee \quad \mathrm{S}0 = 0 \quad \vee \quad \neg\, 1 = 0$

23: $\neg\, 0 = x \quad \vee \quad x \cdot y = 0$ by

3: $0 \cdot y = 0$

17: $\neg\, 0 = x \quad \vee \quad x \cdot y = 0 \quad \vee \quad \neg\, 0 \cdot y = 0$

24: $y \cdot x = 1$ by

4: $y \cdot x = x \cdot y$

19: $\neg\, y \cdot x = x \cdot y \quad \vee \quad y \cdot x = 1$

25: $\neg\, 0 = y \quad \vee \quad y \cdot x = 0$ by

5: $0 \cdot x = 0$

18: $\neg\, 0 = y \quad \vee \quad y \cdot x = 0 \quad \vee \quad \neg\, 0 \cdot x = 0$

26: $\neg\, 1 = 0$ by

10: $\neg\, \mathrm{S}0 = 0$

22: $\mathrm{S}0 = 0 \quad \vee \quad \neg\, 1 = 0$

27: $\neg\, x \leq y \cdot x \quad \vee \quad x \leq 1$ by

24: $y \cdot x = 1$

15: $\neg\, y \cdot x = 1 \quad \vee \quad \neg\, x \leq y \cdot x \quad \vee \quad x \leq 1$

28: $\neg\, y \cdot x = 0 \quad \vee \quad 1 = 0$ by

24: $y \cdot x = 1$

16: $\neg\, y \cdot x = 1 \quad \vee \quad \neg\, y \cdot x = 0 \quad \vee \quad 1 = 0$

29: $\neg\, x \cdot y = 0$ by

26: $\neg\, 1 = 0$

21: $\neg\, x \cdot y = 0 \quad \vee \quad 1 = 0$

30: $\neg\, y \cdot x = 0$ by

26: $\neg\, 1 = 0$

28: $\neg\, y \cdot x = 0 \quad \vee \quad 1 = 0$

31: $\neg\, 0 = x$ by

29: $\neg\, x \cdot y = 0$

23: $\neg\, 0 = x \quad \vee \quad x \cdot y = 0$

32: $\neg\, 0 = y$ by

30: $\neg\, y \cdot x = 0$

25: $\neg\, 0 = y \quad \vee \quad y \cdot x = 0$

33: $y \leq x \cdot y$ by

31: $\neg\, 0 = x$

6: $0 = x \quad \vee \quad y \leq x \cdot y$

34: $\neg\, x \leq 1 \quad \vee \quad 1 = x$ by

31: $\neg\, 0 = x$

8: $\neg\, x \leq 1 \quad \vee \quad 0 = x \quad \vee \quad 1 = x$

35: $x \leq y \cdot x$ by

32: $\neg\, 0 = y$

7: $0 = y \quad \vee \quad x \leq y \cdot x$

36: $\neg\, y \leq 1 \quad \vee \quad 1 = y$ by

32: $\neg\, 0 = y$

9: $\neg\, y \leq 1 \quad \vee \quad 0 = y \quad \vee \quad 1 = y$

37: $y \leq 1$ by

33: $y \leq x \cdot y$

20: $\neg\, y \leq x \cdot y \quad \vee \quad y \leq 1$

38: $x \leq 1$ by

35: $x \leq y \cdot x$

27: $\neg\, x \leq y \cdot x \quad \vee \quad x \leq 1$

39: $1 = y$ by

37: $y \leq 1$

36: $\neg\, y \leq 1 \quad \vee \quad 1 = y$

40: $1 = x$ by

38: $x \leq 1$

34: $\neg\, x \leq 1 \quad \vee \quad 1 = x$

41: $\neg\, 1 = x$ by

39: $1 = y$

1: $\neg\, 1 = x \quad \vee \quad \neg\, 1 = y$

42: QEA by

40: $1 = x$

41: $\neg\, 1 = x$