## Proof of Theorem 201

The theorem to be proved is

$x \neq 0 \quad \rightarrow \quad y \leq x \cdot y$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[\neg\,(x) = (0)] \quad \& \quad [\neg\,(y) \leq (x \cdot y)]]$

### Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\neg\, 0 = x$ from H:$x$:$y$

1: $\neg\, y \leq x \cdot y$ from H:$x$:$y$

2: $0 = x \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{P}x) = x$ from 22;$x$

3: $((\mathrm{P}x) \cdot y) + y = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x)) \cdot y$ from 104;P$x$;$y$

4: $y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) = ((\mathrm{P}x) \cdot y) + y$ from 98;$(\mathrm{P}x) \cdot y$;$y$

5: $y \leq y + ((\mathrm{P}x) \cdot y)$ from 71;$y$;$(\mathrm{P}x) \cdot y$

### Equality substitutions:

6: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{P}x) = x \quad \vee \quad \neg\, y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x)) \cdot y \quad \vee \quad y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) = (x) \cdot y$

7: $\neg\, ((\mathrm{P}x) \cdot y) + y = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x)) \cdot y \quad \vee \quad \neg\, y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) = ((\mathrm{P}x) \cdot y) + y \quad \vee \quad y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x)) \cdot y$

8: $\neg\, y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) = x \cdot y \quad \vee \quad \neg\, y \leq y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) \quad \vee \quad y \leq x \cdot y$

### Inferences:

9: $\mathrm{S}(\mathrm{P}x) = x$ by

0: $\neg\, 0 = x$

2: $0 = x \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{P}x) = x$

10: $\neg\, y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) = x \cdot y \quad \vee \quad \neg\, y \leq y + ((\mathrm{P}x) \cdot y)$ by

1: $\neg\, y \leq x \cdot y$

8: $\neg\, y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) = x \cdot y \quad \vee \quad \neg\, y \leq y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) \quad \vee \quad y \leq x \cdot y$

11: $\neg\, y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) = ((\mathrm{P}x) \cdot y) + y \quad \vee \quad y + ((\mathrm{P}x) \cdot y) = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x)) \cdot y$ by

3: $((\mathrm{P}x) \cdot y) + y = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x)) \cdot y$

7: $\neg\, ((\mathrm{P}x)\cdot y)+y = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x))\cdot y \quad \vee \quad \neg\, y+((\mathrm{P}x)\cdot y) = ((\mathrm{P}x)\cdot y)+y \quad \vee \quad y+((\mathrm{P}x)\cdot y) = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x))\cdot y$

12: $y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x))\cdot y$ by
4: $y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = ((\mathrm{P}x)\cdot y) + y$
11: $\neg\, y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = ((\mathrm{P}x)\cdot y) + y \quad \vee \quad y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x))\cdot y$

13: $\neg\, y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = x\cdot y$ by
5: $y \leq y + ((\mathrm{P}x)\cdot y)$
10: $\neg\, y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = x\cdot y \quad \vee \quad \neg\, y \leq y + ((\mathrm{P}x)\cdot y)$

14: $\neg\, y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x))\cdot y \quad \vee \quad y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = x\cdot y$ by
9: $\mathrm{S}(\mathrm{P}x) = x$
6: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{P}x) = x \quad \vee \quad \neg\, y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x))\cdot y \quad \vee \quad y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = x\cdot y$

15: $y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = x\cdot y$ by
12: $y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x))\cdot y$
14: $\neg\, y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = (\mathrm{S}(\mathrm{P}x))\cdot y \quad \vee \quad y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = x\cdot y$

16: $QEA$ by
13: $\neg\, y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = x\cdot y$
15: $y + ((\mathrm{P}x)\cdot y) = x\cdot y$