Proof of Theorem 197

The theorem to be proved is

$y \oplus x = z \oplus x \quad \rightarrow \quad y = z$ ⋆

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(y \oplus x) = (z \oplus x)] \quad \& \quad [\neg\, (y) = (z)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $z \oplus x = y \oplus x$ from H:y:x:z

1: $\neg\, z = y$ from H:y:x:z

2: $(\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{Q}(y \oplus x)$ from 180;y;x

3: $((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{R}x) = \mathrm{R}(y \oplus x)$ from 180;y;x

4: $(\mathrm{Q}z) \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{Q}(z \oplus x)$ from 180;z;x

5: $((\mathrm{R}z) \cdot (\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{R}x) = \mathrm{R}(z \oplus x)$ from 180;z;x

6: $\neg\, \mathrm{Q}x = 0$ from 178;x

7: $\neg\, (\mathrm{Q}z) \cdot (\mathrm{Q}x) = (\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad \mathrm{Q}x = 0 \quad \vee \quad \mathrm{Q}z = \mathrm{Q}y$ from 141;Qy;Qx;Qz

8: $\neg\, ((\mathrm{R}z) \cdot (\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{R}x) = ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{R}x) \quad \vee \quad (\mathrm{R}z) \cdot (\mathrm{Q}x) = (\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}x)$ from 119;Ry) · (Qx;(Rx);Rz) · (Qx

9: $\neg\, (\mathrm{R}z) \cdot (\mathrm{Q}x) = (\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad \mathrm{Q}x = 0 \quad \vee \quad \mathrm{R}z = \mathrm{R}y$ from 141;Ry;Qx;Rz

10: $\neg\, \mathrm{Q}z = \mathrm{Q}y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{R}z = \mathrm{R}y \quad \vee \quad z = y$ from 193;y;z

Equality substitutions:

11: $\neg\, z \oplus x = y \oplus x \quad \vee \quad (\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{Q}(z \oplus x) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{Q}(y \oplus x)$

12: $\neg\, z \oplus x = y \oplus x \quad \vee \quad ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{R}x) = \mathrm{R}(z \oplus x) \quad \vee \quad \neg\, ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{R}x) = \mathrm{R}(y \oplus x)$

13: $\neg\, (\mathrm{Q}z) \cdot (\mathrm{Q}x) = \mathrm{Q}(z \oplus x) \quad \vee \quad (\mathrm{Q}z) \cdot (\mathrm{Q}x) = (\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Q}(z \oplus x) = (\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}x)$

14: $\neg\, ((\mathrm{R}z) \cdot (\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{R}x) = \mathrm{R}(z \oplus x) \quad \vee \quad ((\mathrm{R}z) \cdot (\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{R}x) = ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{R}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{R}(z \oplus x) = ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}x)) + (\mathrm{R}x)$

Inferences:

15: $(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(z\oplus x) \quad\vee\quad \neg\,(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(y\oplus x)$ by

0: $z\oplus x=y\oplus x$

11: $\neg\, z\oplus x=y\oplus x \quad\vee\quad (\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(z\oplus x) \quad\vee\quad \neg\,(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(y\oplus x)$

16: $((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(z\oplus x) \quad\vee\quad \neg\,((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(y\oplus x)$ by

0: $z\oplus x=y\oplus x$

12: $\neg\, z\oplus x=y\oplus x \quad\vee\quad ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(z\oplus x) \quad\vee\quad \neg\,((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(y\oplus x)$

17: $\neg\,\mathrm{Q}z=\mathrm{Q}y \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{R}z=\mathrm{R}y$ by

1: $\neg\, z=y$

10: $\neg\,\mathrm{Q}z=\mathrm{Q}y \quad\vee\quad \neg\,\mathrm{R}z=\mathrm{R}y \quad\vee\quad z=y$

18: $(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(z\oplus x)$ by

2: $(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(y\oplus x)$

15: $(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(z\oplus x) \quad\vee\quad \neg\,(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(y\oplus x)$

19: $((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(z\oplus x)$ by

3: $((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(y\oplus x)$

16: $((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(z\oplus x) \quad\vee\quad \neg\,((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(y\oplus x)$

20: $(\mathrm{Q}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x) \quad\vee\quad \neg\,(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(z\oplus x)$ by

4: $(\mathrm{Q}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(z\oplus x)$

13: $\neg\,(\mathrm{Q}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(z\oplus x) \quad\vee\quad (\mathrm{Q}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x) \quad\vee\quad \neg\,(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(z\oplus x)$

21: $((\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x) \quad\vee\quad \neg\,((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(z\oplus x)$ by

5: $((\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(z\oplus x)$

14: $\neg\,((\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(z\oplus x) \quad\vee\quad ((\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x) \quad\vee\quad \neg\,((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(z\oplus x)$

22: $\neg\,(\mathrm{Q}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x) \quad\vee\quad \mathrm{Q}z=\mathrm{Q}y$ by

6: $\neg\,\mathrm{Q}x=0$

7: $\neg\,(\mathrm{Q}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x) \quad\vee\quad \mathrm{Q}x=0 \quad\vee\quad \mathrm{Q}z=\mathrm{Q}y$

23: $\neg\,(\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x) \quad\vee\quad \mathrm{R}z=\mathrm{R}y$ by

6: $\neg\,\mathrm{Q}x=0$

9: $\neg\,(\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x) \quad\vee\quad \mathrm{Q}x=0 \quad\vee\quad \mathrm{R}z=\mathrm{R}y$

24: $(\mathrm{Q}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)$ by

18: $(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(z\oplus x)$

20: $(\mathrm{Q}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x) \quad\vee\quad \neg\,(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)=\mathrm{Q}(z\oplus x)$

25: $((\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)$ by

19: $((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(z\oplus x)$

21: $((\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x) \quad\lor\quad \neg\,((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=\mathrm{R}(z\oplus x)$

26: $\mathrm{Q}z=\mathrm{Q}y$ by

24: $(\mathrm{Q}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x)$

22: $\neg\,(\mathrm{Q}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}x) \quad\lor\quad \mathrm{Q}z=\mathrm{Q}y$

27: $(\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x)$ by

25: $((\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)$

8: $\neg\,((\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x)=((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x))+(\mathrm{R}x) \quad\lor\quad (\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x)$

28: $\neg\,\mathrm{R}z=\mathrm{R}y$ by

26: $\mathrm{Q}z=\mathrm{Q}y$

17: $\neg\,\mathrm{Q}z=\mathrm{Q}y \quad\lor\quad \neg\,\mathrm{R}z=\mathrm{R}y$

29: $\mathrm{R}z=\mathrm{R}y$ by

27: $(\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x)$

23: $\neg\,(\mathrm{R}z)\cdot(\mathrm{Q}x)=(\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}x) \quad\lor\quad \mathrm{R}z=\mathrm{R}y$

30: QEA by

28: $\neg\,\mathrm{R}z=\mathrm{R}y$

29: $\mathrm{R}z=\mathrm{R}y$