Proof of Theorem 18i

The theorem to be proved is

$\mathrm{S}x - \mathrm{S}y = x - y \quad \rightarrow \quad \mathrm{S}x - \mathrm{SS}y = x - \mathrm{S}y$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[((\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}y)) = (x - y)] \quad \& \quad [\neg\, ((\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))) = (x - (\mathrm{S}y))]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $(\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}y) = x - y$ from H:x:y

1: $\neg\, (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = x - (\mathrm{S}y)$ from H:x:y

2: $\mathrm{P}((\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$ from 17;Sx;Sy

3: $\mathrm{P}(x - y) = x - (\mathrm{S}y)$ from 17;x;y

Equality substitutions:

4: $\neg\, (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}y) = x - y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}((\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) \quad \vee \quad \mathrm{P}(x - y) = (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$

5: $\neg\, \mathrm{P}(x - y) = x - (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = \mathrm{P}(x - y) \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = x - (\mathrm{S}y)$

Inferences:

6: $\neg\, \mathrm{P}((\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = \mathrm{P}(x - y)$ by

0: $(\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}y) = x - y$

4: $\neg\, (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}y) = x - y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{P}((\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = \mathrm{P}(x - y)$

7: $\neg\, \mathrm{P}(x - y) = x - (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = \mathrm{P}(x - y)$ by

1: $\neg\, (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = x - (\mathrm{S}y)$

5: $\neg\, \mathrm{P}(x - y) = x - (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = \mathrm{P}(x - y) \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = x - (\mathrm{S}y)$

8: $(\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = \mathrm{P}(x - y)$ by

2: $\mathrm{P}((\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$

6: $\neg\, \mathrm{P}((\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = \mathrm{P}(x - y)$

9: $\neg\, (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = \mathrm{P}(x - y)$ by

3: $\mathrm{P}(x - y) = x - (\mathrm{S}y)$

7: $\neg\, \mathrm{P}(x - y) = x - (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = \mathrm{P}(x - y)$

10: QEA by

8: $(\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = \mathrm{P}(x - y)$

9: $\neg\ (\mathrm{S}x) - (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) = \mathrm{P}(x - y)$