Proof of Theorem 182

The theorem to be proved is

$\mathrm{R}\big(x \oplus (y \oplus z)\big) = \mathrm{R}\big((x \oplus y) \oplus z\big)$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[\neg\,(\mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z))) = (\mathrm{R}((x \oplus y) \oplus z))]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\neg\,\mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z)) = \mathrm{R}((x \oplus y) \oplus z)$ from H:x:y:z

1: $(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z) = \mathrm{Q}(y \oplus z)$ from 180;y;z

2: $((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(y \oplus z)$ from 180;y;z

3: $((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y)) + (\mathrm{R}y) = \mathrm{R}(x \oplus y)$ from 180;x;y

4: $((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y \oplus z))) + (\mathrm{R}(y \oplus z)) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z))$ from 180;x;$y \oplus z$

5: $((\mathrm{R}(x \oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}((x \oplus y) \oplus z)$ from 180;$x \oplus y$;z

6: $(\mathrm{R}x)\cdot((\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)$ from 102;Rx;Qy;Qz

7: $(((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y)) + (\mathrm{R}y))\cdot(\mathrm{Q}z)$ from 106;Rx) · (Qy;(Ry);Qz

8: $((\mathrm{R}x)\cdot((\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = (((\mathrm{R}x)\cdot((\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z)$ from 72;Rx) · ((Qy) · (Qz);((Ry) · (Qz));Rz

Equality substitutions:

9: $\neg\,(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z) = \mathrm{Q}(y \oplus z) \;\vee\; \neg\,(\mathrm{R}x)\cdot((\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z) \;\vee\; (\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y \oplus z)) = ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)$

10: $\neg\,((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(y \oplus z) \;\vee\; ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y \oplus z))) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z)) \;\vee\; \neg\,((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y \oplus z))) + (\mathrm{R}(y \oplus z)) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z))$

11: $\neg\,((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y)) + (\mathrm{R}y) = \mathrm{R}(x \oplus y) \;\vee\; \neg\,(((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y)) + (\mathrm{R}y))\cdot(\mathrm{Q}z) \;\vee\; (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = (\mathrm{R}(x \oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)$

12: $\neg\,((\mathrm{R}(x \oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}((x \oplus y) \oplus z) \;\vee\; \neg\,((\mathrm{R}(x \oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z)) \;\vee\; \mathrm{R}((x \oplus y) \oplus z) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z))$

13: $\neg\,(\mathrm{R}x)\cdot((\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z) \;\vee\; \neg\,((\mathrm{R}x)\cdot((\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = (((\mathrm{R}x)\cdot((\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) \;\vee\; (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z)$

14: $\neg\, ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z) = (\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z)) \quad\vee\quad (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z)) \quad\vee\quad \neg\, ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

15: $\neg\, (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = (\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z) \quad\vee\quad \neg\, ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z)) \quad\vee\quad ((\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

16: $\neg\, (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) \quad\vee\quad \neg\, (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z)) \quad\vee\quad ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

Inferences:

17: $\neg\, ((\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}((x\oplus y)\oplus z) \quad\vee\quad \neg\, ((\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$ by

0: $\neg\, \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z)) = \mathrm{R}((x\oplus y)\oplus z)$

12: $\neg\, ((\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}((x\oplus y)\oplus z) \quad\vee\quad \neg\, ((\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z)) \quad\vee\quad \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z)) = \mathrm{R}((x\oplus y)\oplus z)$

18: $\neg\, (\mathrm{R}x)\cdot((\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z) \quad\vee\quad ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z) = (\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))$ by

1: $(\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z) = \mathrm{Q}(y\oplus z)$

9: $\neg\, (\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z) = \mathrm{Q}(y\oplus z) \quad\vee\quad \neg\, (\mathrm{R}x)\cdot((\mathrm{Q}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z) \quad\vee\quad ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z) = (\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))$

19: $((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z)) \quad\vee\quad \neg\, ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))) + (\mathrm{R}(y\oplus z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$ by

2: $((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(y\oplus z)$

10: $\neg\, ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(y\oplus z) \quad\vee\quad ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z)) \quad\vee\quad \neg\, ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))) + (\mathrm{R}(y\oplus z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

20: $\neg\, (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y)) + (\mathrm{R}y))\cdot(\mathrm{Q}z) \quad\vee\quad (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = (\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)$ by

3: $((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y)) + (\mathrm{R}y) = \mathrm{R}(x\oplus y)$

11: $\neg\, ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y)) + (\mathrm{R}y) = \mathrm{R}(x\oplus y) \quad\vee\quad \neg\, (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y)) + (\mathrm{R}y))\cdot(\mathrm{Q}z) \quad\vee\quad (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = (\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)$

21: $((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$ by

4: $((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))) + (\mathrm{R}(y\oplus z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

19: $((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z)) \quad\vee\quad \neg\, ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))) + (\mathrm{R}(y\oplus z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

22: $\neg\,((\mathrm{R}(x \oplus y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z))$ by

5: $((\mathrm{R}(x \oplus y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}((x \oplus y) \oplus z)$

17: $\neg\,((\mathrm{R}(x \oplus y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}((x \oplus y) \oplus z) \;\lor\; \neg\,((\mathrm{R}(x \oplus y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z))$

23: $\neg\,((\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = (((\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) \;\lor\; (((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = ((((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z)$ by

6: $(\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) = ((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)$

13: $\neg\,(\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) = ((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z) \;\lor\; \neg\,((\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = (((\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) \;\lor\; (((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = ((((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z)$

24: $((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z) = (\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}(y \oplus z))$ by

6: $(\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) = ((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)$

18: $\neg\,(\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) = ((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z) \;\lor\; ((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z) = (\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}(y \oplus z))$

25: $(((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) = (\mathrm{R}(x \oplus y)) \cdot (\mathrm{Q}z)$ by

7: $(((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) = (((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) + (\mathrm{R}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)$

20: $\neg\,(((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) = (((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) + (\mathrm{R}y)) \cdot (\mathrm{Q}z) \;\lor\; (((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) = (\mathrm{R}(x \oplus y)) \cdot (\mathrm{Q}z)$

26: $(((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = ((((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z)$ by

8: $((\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = (((\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z)$

23: $\neg\,((\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = (((\mathrm{R}x) \cdot ((\mathrm{Q}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) \;\lor\; (((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = ((((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z)$

27: $\neg\,((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z) = (\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}(y \oplus z)) \;\lor\; (((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z))$ by

21: $((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}(y \oplus z))) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z))$

14: $\neg\,((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z) = (\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}(y \oplus z)) \;\lor\; (((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z)) \;\lor\; \neg\,((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}(y \oplus z))) + (((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z))$

28: $\neg\,(((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z)) = (\mathrm{R}(x \oplus y)) \cdot (\mathrm{Q}z) \;\lor\; \neg\,((((\mathrm{R}x) \cdot (\mathrm{Q}y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y) \cdot (\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z))$ by

22: $\neg\,((\mathrm{R}(x \oplus y)) \cdot (\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x \oplus (y \oplus z))$

15: $\neg\ (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = (\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)\ \ \vee\ \ \neg\ ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))\ \ \vee\ \ ((\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

29: $(((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$ by

24: $((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z) = (\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))$

27: $\neg\ ((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z) = (\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}(y\oplus z))\ \ \vee\ \ (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

30: $\neg\ ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$ by

25: $(((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = (\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)$

28: $\neg\ (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) = (\mathrm{R}(x\oplus y))\cdot(\mathrm{Q}z)\ \ \vee\ \ \neg\ ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

31: $\neg\ (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))\ \ \vee\ \ ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$ by

26: $(((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z)$

16: $\neg\ (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z)\ \ \vee\ \ \neg\ (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))\ \ \vee\ \ ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

32: $((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$ by

29: $(((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

31: $\neg\ (((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + (((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z)) + (\mathrm{R}z)) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))\ \ \vee\ \ ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

33: QEA by

30: $\neg\ ((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$

32: $((((\mathrm{R}x)\cdot(\mathrm{Q}y))\cdot(\mathrm{Q}z)) + ((\mathrm{R}y)\cdot(\mathrm{Q}z))) + (\mathrm{R}z) = \mathrm{R}(x\oplus(y\oplus z))$