Proof of Theorem 170

The theorem to be proved is

$x < y \quad \rightarrow \quad x + z < y + z$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x) < (y)] \quad \& \quad [\neg\,(x + z) < (y + z)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $x < y$ from H:x:y:z

1: $\neg\, x + z < y + z$ from H:x:y:z

2: $y + z \leq x + z \quad \vee \quad x + z < y + z$ from 79;$y + z$;$x + z$

3: $z + y = y + z$ from 98;y;z

4: $z + x = x + z$ from 98;x;z

5: $\neg\, z + y \leq z + x \quad \vee \quad y \leq x$ from 168;z;y;x

6: $\neg\, x < y \quad \vee \quad \neg\, y \leq x$ from 80;x;y

Equality substitutions:

7: $\neg\, z + x = x + z \quad \vee \quad z + y \leq z + x \quad \vee \quad \neg\, z + y \leq x + z$

8: $\neg\; y + z = z + y \quad \vee \quad \neg\,(y + z) \leq x + z \quad \vee \quad \neg\,(z + y) \leq x + z$

Inferences:

9: $\neg\, y \leq x$ by
0: $x < y$
6: $\neg\, x < y \quad \vee \quad \neg\, y \leq x$

10: $y + z \leq x + z$ by
1: $\neg\, x + z < y + z$
2: $y + z \leq x + z \quad \vee \quad x + z < y + z$

11: $\neg\, y + z \leq x + z \quad \vee \quad z + y \leq x + z$ by
3: $z + y = y + z$
8: $\neg\, z + y = y + z \quad \vee \quad \neg\, y + z \leq x + z \quad \vee \quad z + y \leq x + z$

12: $z + y \leq z + x \quad \vee \quad \neg\, z + y \leq x + z$ by

4: $z + x = x + z$

7: $\neg\, z + x = x + z \quad \vee \quad z + y \leq z + x \quad \vee \quad \neg\, z + y \leq x + z$

13: $\neg\, z + y \leq z + x$ by

9: $\neg\, y \leq x$

5: $\neg\, z + y \leq z + x \quad \vee \quad y \leq x$

14: $z + y \leq x + z$ by

10: $y + z \leq x + z$

11: $\neg\, y + z \leq x + z \quad \vee \quad z + y \leq x + z$

15: $\neg\, z + y \leq x + z$ by

13: $\neg\, z + y \leq z + x$

12: $z + y \leq z + x \quad \vee \quad \neg\, z + y \leq x + z$

16: QEA by

14: $z + y \leq x + z$

15: $\neg\, z + y \leq x + z$