Proof of Theorem 153

The theorem to be proved is

$\mathrm{p}_{150}(q,x)$ & $\neg\, \mathrm{SS}x < 2\cdot q$ $\rightarrow$ $\mathrm{p}_{150}(2\cdot q, \mathrm{S}x)$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[\mathrm{p}_{150}((qx))]$ & $[\neg\, (\mathrm{S}(\mathrm{S}x)) < (2\cdot q)]$ & $[\neg\, \mathrm{p}_{150}((2\cdot q\mathrm{S}x))]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\mathrm{p}_{150}((qx))$ from H:q:x

1: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2\cdot q$ from H:q:x

2: $\neg\, \mathrm{p}_{150}((2\cdot q\mathrm{S}x))$ from H:q:x

3: $\neg\, \mathrm{p}_{150}((qx))$ $\vee$ q is a power of two from $150^{\rightarrow}$;q;x

4: $\neg\, \mathrm{p}_{150}((qx))$ $\vee$ $\mathrm{S}x < 2\cdot q$ from $150^{\rightarrow}$;q;x

5: $\mathrm{p}_{150}((2\cdot q\mathrm{S}x))$ $\vee$ $\neg\, 2\cdot q$ is a power of two $\vee$ $\neg\, 2\cdot q \le \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ $\vee$ $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2\cdot(2\cdot q)$ from $150^{\leftarrow}$;$2\cdot q$;$\mathrm{S}x$

6: $\neg\, q$ is a power of two $\vee$ $2\cdot q$ is a power of two from 135;q

7: $\neg\, \mathrm{S}x < 2\cdot q$ $\vee$ $\mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2\cdot(2\cdot q)$ from 124;$\mathrm{S}x$;$2\cdot q$

8: $\neg\, \mathrm{S}x < 2\cdot q$ $\vee$ $\mathrm{S}(\mathrm{S}x) \le 2\cdot q$ from 114;$\mathrm{S}x$;$2\cdot q$

9: $\mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2\cdot q$ $\vee$ $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \le 2\cdot q$ $\vee$ $2\cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ from $56^{\leftarrow}$;$\mathrm{S}(\mathrm{S}x)$;$2\cdot q$

10: $\mathrm{S}(\mathrm{S}x) \le \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ from 60;$\mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

Equality substitutions:

11: $\neg\, 2\cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ $\vee$ $2\cdot q \le \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ $\vee$ $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \le \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

Inferences:

12: q is a power of two by
0: $\mathrm{p}_{150}((qx))$
3: $\neg\, \mathrm{p}_{150}((qx))$ $\vee$ q is a power of two

13: $\mathrm{S}x < 2\cdot q$ by
0: $\mathrm{p}_{150}((qx))$
4: $\neg\, \mathrm{p}_{150}((qx))$ $\vee$ $\mathrm{S}x < 2\cdot q$

14: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \leq 2 \cdot q \quad \vee \quad 2 \cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

1: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2 \cdot q$

9: $\mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2 \cdot q \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \leq 2 \cdot q \quad \vee \quad 2 \cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

15: $\neg\, 2 \cdot q$ is a power of two $\vee \quad \neg\, 2 \cdot q \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2 \cdot (2 \cdot q)$ by

2: $\neg\, \mathrm{p}_{150}((2 \cdot q\mathrm{S}x))$

5: $\mathrm{p}_{150}((2 \cdot q\mathrm{S}x)) \quad \vee \quad \neg\, 2 \cdot q$ is a power of two $\vee \quad \neg\, 2 \cdot q \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2 \cdot (2 \cdot q)$

16: $\neg\, 2 \cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad 2 \cdot q \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

10: $\mathrm{S}(\mathrm{S}x) \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

11: $\neg\, 2 \cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad 2 \cdot q \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

17: $2 \cdot q$ is a power of two by

12: q is a power of two

6: $\neg\, q$ is a power of two $\vee \quad 2 \cdot q$ is a power of two

18: $\mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2 \cdot (2 \cdot q)$ by

13: $\mathrm{S}x < 2 \cdot q$

7: $\neg\, \mathrm{S}x < 2 \cdot q \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2 \cdot (2 \cdot q)$

19: $\mathrm{S}(\mathrm{S}x) \leq 2 \cdot q$ by

13: $\mathrm{S}x < 2 \cdot q$

8: $\neg\, \mathrm{S}x < 2 \cdot q \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \leq 2 \cdot q$

20: $\neg\, 2 \cdot q \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2 \cdot (2 \cdot q)$ by

17: $2 \cdot q$ is a power of two

15: $\neg\, 2 \cdot q$ is a power of two $\vee \quad \neg\, 2 \cdot q \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2 \cdot (2 \cdot q)$

21: $\neg\, 2 \cdot q \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

18: $\mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2 \cdot (2 \cdot q)$

20: $\neg\, 2 \cdot q \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) < 2 \cdot (2 \cdot q)$

22: $2 \cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

19: $\mathrm{S}(\mathrm{S}x) \leq 2 \cdot q$

14: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \leq 2 \cdot q \quad \vee \quad 2 \cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

23: $\neg\, 2 \cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$ by

21: $\neg\, 2 \cdot q \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

16: $\neg\, 2 \cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x) \quad \vee \quad 2 \cdot q \leq \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

24: QEA by

22: $2 \cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$

23: $\neg\, 2 \cdot q = \mathrm{S}(\mathrm{S}x)$