Proof of Theorem 14i

The theorem to be proved is

$x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}x + y \quad \rightarrow \quad x + \mathrm{SS}y = \mathrm{S}x + \mathrm{S}y$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x + (\mathrm{S}y)) = ((\mathrm{S}x) + y)] \quad \& \quad [\neg\, (x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))) = ((\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}y))]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $(\mathrm{S}x) + y = x + (\mathrm{S}y)$ from H:x:y

1: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$ from H:x:y

2: $\mathrm{S}(x + (\mathrm{S}y)) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$ from 12;x;Sy

3: $\mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}y)$ from 12;Sx;y

Equality substitutions:

4: $\neg\, (\mathrm{S}x) + y = x + (\mathrm{S}y) \ \vee\ \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) \ \vee\ \neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{S}y)) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$

5: $\neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}y) \ \vee\ \neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) \ \vee\ (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$

Inferences:

6: $\mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) \ \vee\ \neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{S}y)) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$ by

0: $(\mathrm{S}x) + y = x + (\mathrm{S}y)$

4: $\neg\, (\mathrm{S}x) + y = x + (\mathrm{S}y) \ \vee\ \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) \ \vee\ \neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{S}y)) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$

7: $\neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}y) \ \vee\ \neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$ by

1: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$

5: $\neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}y) \ \vee\ \neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) \ \vee\ (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$

8: $\mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$ by

2: $\mathrm{S}(x + (\mathrm{S}y)) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$

6: $\mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y)) \ \vee\ \neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{S}y)) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$

9: $\neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$ by

3: $\mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}y)$

7: $\neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = (\mathrm{S}x) + (\mathrm{S}y) \ \vee\ \neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$

10: QEA by

8: $\mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$

9: $\neg\, \mathrm{S}((\mathrm{S}x) + y) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{S}y))$