Proof of Theorem 142

The theorem to be proved is

$x \leq y \quad \rightarrow \quad z \cdot x \leq z \cdot y$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x) \leq (y)] \quad \& \quad [\neg\, (z \cdot x) \leq (z \cdot y)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $x \leq y$ from H:x:y:z

1: $\neg\, z \cdot x \leq z \cdot y$ from H:x:y:z

2: $\neg\, x \leq y \quad \vee \quad x \cdot z \leq y \cdot z$ from 107;x;y;z

3: $z \cdot x = x \cdot z$ from 105;z;x

4: $z \cdot y = y \cdot z$ from 105;z;y

Equality substitutions:

5: $\neg\, z \cdot x = x \cdot z \quad \vee \quad z \cdot x \leq z \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq z \cdot y$

6: $\neg\, z \cdot y = y \cdot z \quad \vee \quad x \cdot z \leq z \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq y \cdot z$

Inferences:

7: $x \cdot z \leq y \cdot z$ by
0: $x \leq y$
2: $\neg\, x \leq y \quad \vee \quad x \cdot z \leq y \cdot z$

8: $\neg\, z \cdot x = x \cdot z \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq z \cdot y$ by
1: $\neg\, z \cdot x \leq z \cdot y$
5: $\neg\, z \cdot x = x \cdot z \quad \vee \quad z \cdot x \leq z \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq z \cdot y$

9: $\neg\, x \cdot z \leq z \cdot y$ by
3: $z \cdot x = x \cdot z$
8: $\neg\, z \cdot x = x \cdot z \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq z \cdot y$

10: $x \cdot z \leq z \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq y \cdot z$ by
4: $z \cdot y = y \cdot z$
6: $\neg\, z \cdot y = y \cdot z \quad \vee \quad x \cdot z \leq z \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq y \cdot z$

11: $x \cdot z \leq z \cdot y$ by

7: $x \cdot z \leq y \cdot z$

10: $x \cdot z \leq z \cdot y \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq y \cdot z$

12: QEA by

9: $\neg\, x \cdot z \leq z \cdot y$

11: $x \cdot z \leq z \cdot y$