Proof of Theorem 124

The theorem to be proved is

$x < y \quad \rightarrow \quad \mathrm{S}x < 2 \cdot y$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $\quad [[(x) < (y)] \quad \& \quad [\neg\, (\mathrm{S}x) < (2 \cdot y)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $x < y$ from H:x:y

1: $\neg\, \mathrm{S}x < 2 \cdot y$ from H:x:y

2: $2 \cdot y = y + y$ from 118;y

3: $\neg\, x < y \quad \vee \quad \mathrm{S}x \leq y$ from 114;x;y

4: $\neg\, x < y \quad \vee \quad \neg\, 0 = y$ from 123;x;y

5: $0 = y \quad \vee \quad y < y + y$ from 121;y;y

6: $\neg\, \mathrm{S}x \leq y \quad \vee \quad \neg\, y < y + y \quad \vee \quad \mathrm{S}x < y + y$ from 122;Sx;y;$y + y$

Equality substitutions:

7: $\neg\, 2 \cdot y = y + y \quad \vee \quad \mathrm{S}x < 2 \cdot y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}x < y + y$

Inferences:

8: $\mathrm{S}x \leq y$ by
0: $x < y$
3: $\neg\, x < y \quad \vee \quad \mathrm{S}x \leq y$

9: $\neg\, 0 = y$ by
0: $x < y$
4: $\neg\, x < y \quad \vee \quad \neg\, 0 = y$

10: $\neg\, 2 \cdot y = y + y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}x < y + y$ by
1: $\neg\, \mathrm{S}x < 2 \cdot y$
7: $\neg\, 2 \cdot y = y + y \quad \vee \quad \mathrm{S}x < 2 \cdot y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}x < y + y$

11: $\neg\, \mathrm{S}x < y + y$ by
2: $2 \cdot y = y + y$
10: $\neg\, 2 \cdot y = y + y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}x < y + y$

12: $\neg\, y < y + y \quad \vee \quad \mathrm{S}x < y + y \qquad$ by

8: $\mathrm{S}x \leq y$

6: $\neg\, \mathrm{S}x \leq y \quad \vee \quad \neg\, y < y + y \quad \vee \quad \mathrm{S}x < y + y$

13: $y < y + y \qquad$ by

9: $\neg\, 0 = y$

5: $0 = y \quad \vee \quad y < y + y$

14: $\neg\, y < y + y \qquad$ by

11: $\neg\, \mathrm{S}x < y + y$

12: $\neg\, y < y + y \quad \vee \quad \mathrm{S}x < y + y$

15: $QEA \qquad$ by

13: $y < y + y$

14: $\neg\, y < y + y$