Proof of Theorem 112

The theorem to be proved is

$x \leq y \quad \rightarrow \quad \mathrm{S}x \leq \mathrm{S}y$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x) \leq (y)] \quad \& \quad [\neg\, (\mathrm{S}x) \leq (\mathrm{S}y)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $x \leq y$ from H:x:y

1: $\neg\, \mathrm{S}x \leq \mathrm{S}y$ from H:x:y

2: $\neg\, x \leq y \quad \vee \quad x + (y - x) = y$ from 68;x;y

3: $\mathrm{S}(x + (y - x)) = x + (\mathrm{S}(y - x))$ from 12;x;$y - x$

4: $(\mathrm{S}x) + (y - x) = x + (\mathrm{S}(y - x))$ from 14;x;$y - x$

5: $\mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (y - x)$ from 71;Sx;$y - x$

Equality substitutions:

6: $\neg\, x + (y - x) = y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(x + (y - x)) = x + (\mathrm{S}(y - x)) \quad \vee \quad \mathrm{S}(y) = x + (\mathrm{S}(y - x))$

7: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (y - x) = x + (\mathrm{S}(y - x)) \quad \vee \quad (\mathrm{S}x) + (y - x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, x + (\mathrm{S}(y - x)) = \mathrm{S}y$

8: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (y - x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (y - x) \quad \vee \quad \mathrm{S}x \leq \mathrm{S}y$

Inferences:

9: $x + (y - x) = y$ by
- 0: $x \leq y$
- 2: $\neg\, x \leq y \quad \vee \quad x + (y - x) = y$

10: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (y - x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (y - x)$ by
- 1: $\neg\, \mathrm{S}x \leq \mathrm{S}y$
- 8: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (y - x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (y - x) \quad \vee \quad \mathrm{S}x \leq \mathrm{S}y$

11: $\neg\, x + (y - x) = y \quad \vee \quad x + (\mathrm{S}(y - x)) = \mathrm{S}y$ by
- 3: $\mathrm{S}(x + (y - x)) = x + (\mathrm{S}(y - x))$
- 6: $\neg\, x + (y - x) = y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(x + (y - x)) = x + (\mathrm{S}(y - x)) \quad \vee \quad x + (\mathrm{S}(y - x)) = \mathrm{S}y$

12: $(\mathrm{S}x) + (y - x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, x + (\mathrm{S}(y - x)) = \mathrm{S}y$ by

4: $(\mathrm{S}x) + (y - x) = x + (\mathrm{S}(y - x))$

7: $\neg\, (\mathrm{S}x)+(y-x) = x+(\mathrm{S}(y-x)) \quad \vee \quad (\mathrm{S}x)+(y-x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, x+(\mathrm{S}(y-x)) = \mathrm{S}y$

13: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (y - x) = \mathrm{S}y$ by

5: $\mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (y - x)$

10: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (y - x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}x \leq (\mathrm{S}x) + (y - x)$

14: $x + (\mathrm{S}(y - x)) = \mathrm{S}y$ by

9: $x + (y - x) = y$

11: $\neg\, x + (y - x) = y \quad \vee \quad x + (\mathrm{S}(y - x)) = \mathrm{S}y$

15: $\neg\, x + (\mathrm{S}(y - x)) = \mathrm{S}y$ by

13: $\neg\, (\mathrm{S}x) + (y - x) = \mathrm{S}y$

12: $(\mathrm{S}x) + (y - x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, x + (\mathrm{S}(y - x)) = \mathrm{S}y$

16: QEA by

14: $x + (\mathrm{S}(y - x)) = \mathrm{S}y$

15: $\neg\, x + (\mathrm{S}(y - x)) = \mathrm{S}y$