Proof of Theorem 109

The theorem to be proved is

$x < \mathrm{S}y \quad \rightarrow \quad x \leq y$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x) < (\mathrm{S}y)] \quad \& \quad [\neg\, (x) \leq (y)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $x < \mathrm{S}y$ from H:x:y

1: $\neg\, x \leq y$ from H:x:y

2: $\neg\, x < \mathrm{S}y \quad \vee \quad x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y$ from 108;x;Sy

3: $\neg\, x < \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{S}y) - x = 0$ from 108;x;Sy

4: $(\mathrm{S}y) - x = 0 \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x$ from 22;$(\mathrm{S}y) - x$

5: $\mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)))$ from 12;x;$\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)$

6: $\neg\, \mathrm{S}(x+(\mathrm{P}((\mathrm{S}y)-x))) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad x+(\mathrm{P}((\mathrm{S}y)-x)) = y$ from 4;$x+(\mathrm{P}((\mathrm{S}y)-x))$;$y$

7: $x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))$ from 71;x;$\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)$

Equality substitutions:

8: $\neg\, x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x) \quad \vee \quad \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$

9: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) \quad \vee \quad \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x)$

10: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) \quad \vee \quad x \leq y$

Inferences:

11: $x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y$ by

0: $x < \mathrm{S}y$

2: $\neg\, x < \mathrm{S}y \quad \vee \quad x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y$

12: $\neg\, (\mathrm{S}y) - x = 0$ by

0: $x < \mathrm{S}y$

3: $\neg\, x < \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{S}y) - x = 0$

13: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))$ by

1: $\neg\, x \leq y$

10: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) \quad \vee \quad x \leq y$

14: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x \quad \vee \quad \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x)$ by

5: $\mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)))$

9: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + (\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) \quad \vee \quad \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x)$

15: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y$ by

7: $x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))$

13: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y \quad \vee \quad \neg\, x \leq x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))$

16: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x) \quad \vee \quad \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$ by

11: $x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y$

8: $\neg\, x + ((\mathrm{S}y) - x) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x) \quad \vee \quad \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$

17: $\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x$ by

12: $\neg\, (\mathrm{S}y) - x = 0$

4: $(\mathrm{S}y) - x = 0 \quad \vee \quad \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x$

18: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$ by

15: $\neg\, x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y$

6: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y \quad \vee \quad x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = y$

19: $\mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x)$ by

17: $\mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x$

14: $\neg\, \mathrm{S}(\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x)) = (\mathrm{S}y) - x \quad \vee \quad \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x)$

20: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x)$ by

18: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$

16: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x) \quad \vee \quad \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = \mathrm{S}y$

21: QEA by

19: $\mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x)$

20: $\neg\, \mathrm{S}(x + (\mathrm{P}((\mathrm{S}y) - x))) = x + ((\mathrm{S}y) - x)$