Proof of Theorem 107

The theorem to be proved is

$x \leq y \quad \rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x) \leq (y)] \quad \& \quad [\neg\, (x \cdot z) \leq (y \cdot z)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $x \leq y$ from H:x:y:z

1: $\neg\, x \cdot z \leq y \cdot z$ from H:x:y:z

2: $\neg\, x \leq y \quad \vee \quad x + (y - x) = y$ from 68;x;y

3: $(x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = (x + (y - x)) \cdot z$ from 106;x;$y - x$;z

4: $x \cdot z \leq (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z)$ from 71;$x \cdot z$;$(y - x) \cdot z$

Equality substitutions:

5: $\neg\, x+(y-x) = y \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot z)+((y-x) \cdot z) = (x+(y-x)) \cdot z \quad \vee \quad (x \cdot z)+((y-x) \cdot z) = (y) \cdot z$

6: $\neg\, (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = y \cdot z \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) \quad \vee \quad x \cdot z \leq y \cdot z$

Inferences:

7: $x + (y - x) = y$ by

0: $x \leq y$

2: $\neg\, x \leq y \quad \vee \quad x + (y - x) = y$

8: $\neg\, (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = y \cdot z \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z)$ by

1: $\neg\, x \cdot z \leq y \cdot z$

6: $\neg\, (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = y \cdot z \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) \quad \vee \quad x \cdot z \leq y \cdot z$

9: $\neg\, x + (y - x) = y \quad \vee \quad (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = y \cdot z$ by

3: $(x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = (x + (y - x)) \cdot z$

5: $\neg\, x+(y-x) = y \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot z)+((y-x) \cdot z) = (x+(y-x)) \cdot z \quad \vee \quad (x \cdot z)+((y-x) \cdot z) = y \cdot z$

10: $\neg\, (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = y \cdot z$ by

4: $x \cdot z \leq (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z)$

8: $\neg\, (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = y \cdot z \quad \vee \quad \neg\, x \cdot z \leq (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z)$

11: $(x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = y \cdot z$ by

7: $x + (y - x) = y$

9: $\neg\, x + (y - x) = y \quad \vee \quad (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = y \cdot z$

12: QEA by

10: $\neg\, (x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = y \cdot z$

11: $(x \cdot z) + ((y - x) \cdot z) = y \cdot z$