Proof of Theorem 106

The theorem to be proved is

$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[\neg ((x + y) \cdot z) = ((x \cdot z) + (y \cdot z))]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\neg (x \cdot z) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$ from H:x:y:z

1: $z \cdot (x + y) = (x + y) \cdot z$ from 105;$x + y$;z

2: $(z \cdot x) + (z \cdot y) = z \cdot (x + y)$ from 101;z;x;y

3: $z \cdot x = x \cdot z$ from 105;z;x

4: $z \cdot y = y \cdot z$ from 105;z;y

Equality substitutions:

5: $\neg z \cdot (x + y) = (x + y) \cdot z \ \vee \ \neg (z \cdot x) + (z \cdot y) = z \cdot (x + y) \ \vee \ (z \cdot x) + (z \cdot y) = (x + y) \cdot z$

6: $\neg z \cdot x = x \cdot z \ \vee \ \neg (z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z \ \vee \ (x \cdot z) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$

7: $\neg z \cdot y = y \cdot z \ \vee \ \neg (z \cdot x) + (z \cdot y) = (x + y) \cdot z \ \vee \ (z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$

Inferences:

8: $\neg z \cdot x = x \cdot z \ \vee \ \neg (z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$ by
0: $\neg (x \cdot z) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$
6: $\neg z \cdot x = x \cdot z \ \vee \ \neg (z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z \ \vee \ (x \cdot z) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$

9: $\neg (z \cdot x) + (z \cdot y) = z \cdot (x + y) \ \vee \ (z \cdot x) + (z \cdot y) = (x + y) \cdot z$ by
1: $z \cdot (x + y) = (x + y) \cdot z$
5: $\neg z \cdot (x + y) = (x + y) \cdot z \ \vee \ \neg (z \cdot x) + (z \cdot y) = z \cdot (x + y) \ \vee \ (z \cdot x) + (z \cdot y) = (x + y) \cdot z$

10: $(z \cdot x) + (z \cdot y) = (x + y) \cdot z$ by
2: $(z \cdot x) + (z \cdot y) = z \cdot (x + y)$
9: $\neg (z \cdot x) + (z \cdot y) = z \cdot (x + y) \ \vee \ (z \cdot x) + (z \cdot y) = (x + y) \cdot z$

11: $\neg\,(z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$ by

3: $z \cdot x = x \cdot z$

8: $\neg\, z \cdot x = x \cdot z \quad \vee \quad \neg\,(z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$

12: $\neg\,(z \cdot x) + (z \cdot y) = (x + y) \cdot z \quad \vee \quad (z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$ by

4: $z \cdot y = y \cdot z$

7: $\neg\, z \cdot y = y \cdot z \quad \vee \quad \neg\,(z \cdot x) + (z \cdot y) = (x + y) \cdot z \quad \vee \quad (z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$

13: $(z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$ by

10: $(z \cdot x) + (z \cdot y) = (x + y) \cdot z$

12: $\neg\,(z \cdot x) + (z \cdot y) = (x + y) \cdot z \quad \vee \quad (z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$

14: QEA by

11: $\neg\,(z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$

13: $(z \cdot x) + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$