Proof of Theorem 105i

The theorem to be proved is

$x \cdot y = y \cdot x \quad \rightarrow \quad x \cdot \mathrm{S}y = \mathrm{S}y \cdot x$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x \cdot y) = (y \cdot x)] \quad \& \quad [\neg\, (x \cdot (\mathrm{S}y)) = ((\mathrm{S}y) \cdot x)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $y \cdot x = x \cdot y$ from H:x:y

1: $\neg\, (\mathrm{S}y) \cdot x = x \cdot (\mathrm{S}y)$ from H:x:y

2: $(x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$ from 100;x;y

3: $(y \cdot x) + x = (\mathrm{S}y) \cdot x$ from 104;y;x

Equality substitutions:

4: $\neg\, y \cdot x = x \cdot y \quad \vee \quad (y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$

5: $\neg\, (y \cdot x) + x = (\mathrm{S}y) \cdot x \quad \vee \quad \neg\, (y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad (\mathrm{S}y) \cdot x = x \cdot (\mathrm{S}y)$

Inferences:

6: $(y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$ by

0: $y \cdot x = x \cdot y$

4: $\neg\, y \cdot x = x \cdot y \quad \vee \quad (y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$

7: $\neg\, (y \cdot x) + x = (\mathrm{S}y) \cdot x \quad \vee \quad \neg\, (y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$ by

1: $\neg\, (\mathrm{S}y) \cdot x = x \cdot (\mathrm{S}y)$

5: $\neg\, (y \cdot x) + x = (\mathrm{S}y) \cdot x \quad \vee \quad \neg\, (y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad (\mathrm{S}y) \cdot x = x \cdot (\mathrm{S}y)$

8: $(y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$ by

2: $(x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$

6: $(y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$

9: $\neg\, (y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$ by

3: $(y \cdot x) + x = (\mathrm{S}y) \cdot x$

7: $\neg\, (y \cdot x) + x = (\mathrm{S}y) \cdot x \quad \vee \quad \neg\, (y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$

10: QEA by

8: $(y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$

9: $\neg\, (y \cdot x) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$