Proof of Theorem 104i

The theorem to be proved is

$\mathrm{S}x \cdot y = x \cdot y + y \quad \rightarrow \quad \mathrm{S}x \cdot \mathrm{S}y = x \cdot \mathrm{S}y + \mathrm{S}y$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[((\mathrm{S}x) \cdot y) = ((x \cdot y) + y)] \quad \& \quad [\neg ((\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)) = ((x \cdot (\mathrm{S}y)) + (\mathrm{S}y))]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $(x \cdot y) + y = (\mathrm{S}x) \cdot y$ from H:x:y

1: $\neg (x \cdot (\mathrm{S}y)) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ from H:x:y

2: $(x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$ from 100;x;y

3: $((\mathrm{S}x) \cdot y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ from 100;Sx;y

4: $(x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y)$ from 72;$x \cdot y$;x;Sy

5: $(x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = ((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x)$ from 72;$x \cdot y$;y;Sx

6: $(\mathrm{S}y) + x = y + (\mathrm{S}x)$ from 14;y;x

7: $(\mathrm{S}y) + x = x + (\mathrm{S}y)$ from 98;Sy;x

Equality substitutions:

8: $\neg (x \cdot y) + y = (\mathrm{S}x) \cdot y \quad \vee \quad ((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg ((\mathrm{S}x) \cdot y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

9: $\neg (x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad (x \cdot (\mathrm{S}y)) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

10: $\neg (x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg (x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

11: $\neg (x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = ((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad (x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg ((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

12: $\neg (\mathrm{S}y) + x = y + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg (\mathrm{S}y) + x = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$

13: $\neg y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg (x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad (x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

Inferences:

14: $((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, ((\mathrm{S}x) \cdot y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ by

0: $(x \cdot y) + y = (\mathrm{S}x) \cdot y$

8: $\neg\, (x \cdot y) + y = (\mathrm{S}x) \cdot y \quad \vee \quad ((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, ((\mathrm{S}x) \cdot y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

15: $\neg\, (x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ by

1: $\neg\, (x \cdot (\mathrm{S}y)) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

9: $\neg\, (x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad (x \cdot (\mathrm{S}y)) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

16: $\neg\, ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ by

2: $(x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y)$

15: $\neg\, (x \cdot y) + x = x \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

17: $((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ by

3: $((\mathrm{S}x) \cdot y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

14: $((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, ((\mathrm{S}x) \cdot y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

18: $\neg\, (x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ by

4: $(x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y)$

10: $\neg\, (x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

19: $(x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, ((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ by

5: $(x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = ((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x)$

11: $\neg\, (x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = ((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad (x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, ((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

20: $\neg\, (\mathrm{S}y) + x = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$ by

6: $(\mathrm{S}y) + x = y + (\mathrm{S}x)$

12: $\neg\, (\mathrm{S}y) + x = y + (\mathrm{S}x) \quad \vee \quad \neg\, (\mathrm{S}y) + x = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$

21: $y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$ by

7: $(\mathrm{S}y) + x = x + (\mathrm{S}y)$

20: $\neg\, (\mathrm{S}y) + x = x + (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$

22: $\neg\, (x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ by

16: $\neg\, ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

18: $\neg\, (x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad ((x \cdot y) + x) + (\mathrm{S}y) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

23: $(x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ by

17: $((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

19: $(x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, ((x \cdot y) + y) + (\mathrm{S}x) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

24: $\neg\, (x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad (x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ by

21: $y + (\mathrm{S}x) = x + (\mathrm{S}y)$

13: $\neg\, y+(\mathrm{S}x) = x+(\mathrm{S}y) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot y)+(y+(\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad (x \cdot y)+(x+(\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

25: $\neg\, (x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$ by

22: $\neg\, (x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

24: $\neg\, (x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y) \quad \vee \quad (x \cdot y) + (x + (\mathrm{S}y)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

26: QEA by

23: $(x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$

25: $\neg\, (x \cdot y) + (y + (\mathrm{S}x)) = (\mathrm{S}x) \cdot (\mathrm{S}y)$