## Proof of Theorem 102i

The theorem to be proved is

$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \rightarrow \quad x \cdot (y \cdot \mathrm{S}z) = (x \cdot y) \cdot \mathrm{S}z$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)] \quad \& \quad [\neg\, (x \cdot (y \cdot (\mathrm{S}z))) = ((x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z))]]$

### Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ from H:$x$:$y$:$z$

1: $\neg\, x \cdot (y \cdot (\mathrm{S}z)) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$ from H:$x$:$y$:$z$

2: $(y \cdot z) + y = y \cdot (\mathrm{S}z)$ from 100;$y$;$z$

3: $((x \cdot y) \cdot z) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$ from 100;$x \cdot y$;$z$

4: $(x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = x \cdot ((y \cdot z) + y)$ from 101;$x$;$y \cdot z$;$y$

### Equality substitutions:

5: $\neg\, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \vee \quad (x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad \neg\, ((x \cdot y) \cdot z) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

6: $\neg\, (y \cdot z) + y = y \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad \neg\, x \cdot ((y \cdot z) + y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad x \cdot (y \cdot (\mathrm{S}z)) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

7: $\neg\, (x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = x \cdot ((y \cdot z) + y) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad x \cdot ((y \cdot z) + y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

### Inferences:

8: $(x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad \neg\, ((x \cdot y) \cdot z) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$ by

0: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

5: $\neg\, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \vee \quad (x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad \neg\, ((x \cdot y) \cdot z) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

9: $\neg\, (y \cdot z) + y = y \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad \neg\, x \cdot ((y \cdot z) + y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$ by

1: $\neg\, x \cdot (y \cdot (\mathrm{S}z)) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

6: $\neg\, (y \cdot z) + y = y \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad \neg\, x \cdot ((y \cdot z) + y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad x \cdot (y \cdot (\mathrm{S}z)) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

10: $\neg\, x \cdot ((y \cdot z) + y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$ by

2: $(y \cdot z) + y = y \cdot (\mathrm{S}z)$

9: $\neg\, (y \cdot z) + y = y \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad \neg\, x \cdot ((y \cdot z) + y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

11: $(x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$ by

3: $((x \cdot y) \cdot z) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

8: $(x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad \neg\, ((x \cdot y) \cdot z) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

12: $\neg\, (x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad x \cdot ((y \cdot z) + y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$ by

4: $(x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = x \cdot ((y \cdot z) + y)$

7: $\neg\, (x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = x \cdot ((y \cdot z) + y) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$
$\vee \quad x \cdot ((y \cdot z) + y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

13: $\neg\, (x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$ by

10: $\neg\, x \cdot ((y \cdot z) + y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

12: $\neg\, (x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad x \cdot ((y \cdot z) + y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

14: $QEA$ by

11: $(x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$

13: $\neg\, (x \cdot (y \cdot z)) + (x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot (\mathrm{S}z)$