Proof of Theorem 101i

The theorem to be proved is

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \rightarrow \quad x \cdot (y + \mathrm{S}z) = x \cdot y + x \cdot \mathrm{S}z$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[(x \cdot (y + z)) = ((x \cdot y) + (x \cdot z))] \quad \& \quad [\neg\, (x \cdot (y + (\mathrm{S}z))) = ((x \cdot y) + (x \cdot (\mathrm{S}z)))]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $(x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot (y + z)$ from H:x:y:z

1: $\neg\, (x \cdot y) + (x \cdot (\mathrm{S}z)) = x \cdot (y + (\mathrm{S}z))$ from H:x:y:z

2: $\mathrm{S}(y + z) = y + (\mathrm{S}z)$ from 12;y;z

3: $(x \cdot z) + x = x \cdot (\mathrm{S}z)$ from 100;x;z

4: $(x \cdot (y + z)) + x = x \cdot (\mathrm{S}(y + z))$ from 100;x;$y + z$

5: $(x \cdot y) + ((x \cdot z) + x) = ((x \cdot y) + (x \cdot z)) + x$ from 72;$x \cdot y$;$x \cdot z$;x

Equality substitutions:

6: $\neg\, (x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot (y + z) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot y) + ((x \cdot z) + x) = ((x \cdot y) + (x \cdot z)) + x$
$\vee \quad (x \cdot y) + ((x \cdot z) + x) = (x \cdot (y + z)) + x$

7: $\neg\, \mathrm{S}(y + z) = y + (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot (y + z)) + x = x \cdot (\mathrm{S}(y + z)) \quad \vee \quad (x \cdot (y + z)) + x =$
$x \cdot (y + (\mathrm{S}z))$

8: $\neg\, (x \cdot z) + x = x \cdot (\mathrm{S}z) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot y) + ((x \cdot z) + x) = x \cdot (y + (\mathrm{S}z)) \quad \vee \quad (x \cdot y) + (x \cdot (\mathrm{S}z)) =$
$x \cdot (y + (\mathrm{S}z))$

9: $\neg\, (x \cdot y) + ((x \cdot z) + x) = (x \cdot (y + z)) + x \quad \vee \quad (x \cdot y) + ((x \cdot z) + x) = x \cdot (y + (\mathrm{S}z))$
$\vee \quad \neg\, (x \cdot (y + z)) + x = x \cdot (y + (\mathrm{S}z))$

Inferences:

10: $\neg\, (x \cdot y) + ((x \cdot z) + x) = ((x \cdot y) + (x \cdot z)) + x \quad \vee \quad (x \cdot y) + ((x \cdot z) + x) = (x \cdot (y + z)) + x$
by

0: $(x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot (y + z)$

6: $\neg\, (x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot (y + z) \quad \vee \quad \neg\, (x \cdot y) + ((x \cdot z) + x) = ((x \cdot y) + (x \cdot z)) + x$
$\vee \quad (x \cdot y) + ((x \cdot z) + x) = (x \cdot (y + z)) + x$

11: $\neg\,(x\cdot z)+x=x\cdot(\mathrm{S}z) \quad\vee\quad \neg\,(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$ by

1: $\neg\,(x\cdot y)+(x\cdot(\mathrm{S}z))=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$

8: $\neg\,(x\cdot z)+x=x\cdot(\mathrm{S}z) \quad\vee\quad \neg\,(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=x\cdot(y+(\mathrm{S}z)) \quad\vee\quad (x\cdot y)+(x\cdot(\mathrm{S}z))=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$

12: $\neg\,(x\cdot(y+z))+x=x\cdot(\mathrm{S}(y+z)) \quad\vee\quad (x\cdot(y+z))+x=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$ by

2: $\mathrm{S}(y+z)=y+(\mathrm{S}z)$

7: $\neg\,\mathrm{S}(y+z)=y+(\mathrm{S}z) \quad\vee\quad \neg\,(x\cdot(y+z))+x=x\cdot(\mathrm{S}(y+z)) \quad\vee\quad (x\cdot(y+z))+x=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$

13: $\neg\,(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$ by

3: $(x\cdot z)+x=x\cdot(\mathrm{S}z)$

11: $\neg\,(x\cdot z)+x=x\cdot(\mathrm{S}z) \quad\vee\quad \neg\,(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$

14: $(x\cdot(y+z))+x=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$ by

4: $(x\cdot(y+z))+x=x\cdot(\mathrm{S}(y+z))$

12: $\neg\,(x\cdot(y+z))+x=x\cdot(\mathrm{S}(y+z)) \quad\vee\quad (x\cdot(y+z))+x=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$

15: $(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=(x\cdot(y+z))+x$ by

5: $(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=((x\cdot y)+(x\cdot z))+x$

10: $\neg\,(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=((x\cdot y)+(x\cdot z))+x \quad\vee\quad (x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=(x\cdot(y+z))+x$

16: $\neg\,(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=(x\cdot(y+z))+x \quad\vee\quad \neg\,(x\cdot(y+z))+x=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$ by

13: $\neg\,(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$

9: $\neg\,(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=(x\cdot(y+z))+x \quad\vee\quad (x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=x\cdot(y+(\mathrm{S}z)) \quad\vee\quad \neg\,(x\cdot(y+z))+x=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$

17: $\neg\,(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=(x\cdot(y+z))+x$ by

14: $(x\cdot(y+z))+x=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$

16: $\neg\,(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=(x\cdot(y+z))+x \quad\vee\quad \neg\,(x\cdot(y+z))+x=x\cdot(y+(\mathrm{S}z))$

18: QEA by

15: $(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=(x\cdot(y+z))+x$

17: $\neg\,(x\cdot y)+((x\cdot z)+x)=(x\cdot(y+z))+x$