Proof of Theorem 000i

The theorem to be proved is

$[x_1 \oplus y = x_2 \oplus y \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2] \quad \rightarrow \quad [x_1 \oplus y \oplus \underline{0} = x_2 \oplus y \oplus \underline{0} \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2]$

Suppose the theorem does not hold. Then, with the variables held fixed,

(H) $[[\neg\, (x_1 \oplus y) = (x_2 \oplus y) \quad \vee \quad (x_1) = (x_2)] \quad \& \quad [(x_1 \oplus (y \oplus \underline{0})) = (x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}))] \quad \& \quad [\neg\, (x_1) = (x_2)]]$

Special cases of the hypothesis and previous results:

0: $\neg\, x_2 \oplus y = x_1 \oplus y \quad \vee \quad x_2 = x_1$ from H:x_1:y:x_2

1: $x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = x_1 \oplus (y \oplus \underline{0})$ from H:x_1:y:x_2

2: $\neg\, x_2 = x_1$ from H:x_1:y:x_2

3: $x_1 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$ from 183;x_1;y;$\underline{0}$

4: $x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0}$ from 183;x_2;y;$\underline{0}$

5: $\mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_1 \oplus y$ from 243;$x_1 \oplus y$

6: $\mathrm{Chop}((x_2 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y$ from 243;$x_2 \oplus y$

Equality substitutions:

7: $\neg\, x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = x_1 \oplus (y \oplus \underline{0}) \;\vee\; x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \;\vee\; \neg\, x_1 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$

8: $\neg\, x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} \;\vee\; \neg\, x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \;\vee\; (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$

9: $\neg\, \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_1 \oplus y \;\vee\; \neg\, \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y \;\vee\; x_1 \oplus y = x_2 \oplus y$

10: $\neg\, (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \;\vee\; \neg\, \mathrm{Chop}((x_2 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y \;\vee\; \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y$

Inferences:

11: $x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \neg\, x_1 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$ by

1: $x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = x_1 \oplus (y \oplus \underline{0})$

7: $\neg\, x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = x_1 \oplus (y \oplus \underline{0}) \quad \vee \quad x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \neg\, x_1 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$

12: $\neg\, x_2 \oplus y = x_1 \oplus y$ by

2: $\neg\, x_2 = x_1$

0: $\neg\, x_2 \oplus y = x_1 \oplus y \quad \vee \quad x_2 = x_1$

13: $x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$ by

3: $x_1 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$

11: $x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \neg\, x_1 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$

14: $\neg\, x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \quad \vee \quad (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$ by

4: $x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0}$

8: $\neg\, x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \neg\, x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \quad \vee \quad (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$

15: $\neg\, \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y \quad \vee \quad x_2 \oplus y = x_1 \oplus y$ by

5: $\mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_1 \oplus y$

9: $\neg\, \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_1 \oplus y \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y \quad \vee \quad x_2 \oplus y = x_1 \oplus y$

16: $\neg\, (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y$ by

6: $\mathrm{Chop}((x_2 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y$

10: $\neg\, (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \neg\, \mathrm{Chop}((x_2 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y \quad \vee \quad \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y$

17: $\neg\, \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y$ by

12: $\neg\, x_2 \oplus y = x_1 \oplus y$

15: $\neg\, \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y \quad \vee \quad x_2 \oplus y = x_1 \oplus y$

18: $(x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$ by

13: $x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$

14: $\neg\, x_2 \oplus (y \oplus \underline{0}) = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \quad \vee \quad (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$

19: $\neg\, (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$ by

17: $\neg\, \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y$

16: $\neg\, (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0} \quad \vee \quad \mathrm{Chop}((x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}) = x_2 \oplus y$

20: QEA by

18: $(x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$

19: $\neg\, (x_2 \oplus y) \oplus \underline{0} = (x_1 \oplus y) \oplus \underline{0}$