# Confessioni d'un Matematico Apostata

Edward Nelson
dipartimento di matematica
Università di Princeton
http://www.math.princeton.edu/~nelson/papers.html

Nel mezzo del periodo tra Mosè e Gesù è apparsa una figura anch'essa dotata di un forte carisma: Pitagora dalla coscia d'oro. Figlio di una greca e d'un fenicio, visse per anni in Egitto, subì un periodo di cattività in Babilonia, e fondò la "Fratellanza Pitagorica" nell'Italia meridionale. La fratellanza era cosa rara per l'epoca sua, e purtroppo! anche per la nostra: una vera fratellanza *e sorrellanza.* Le leggende che circondano la figura di Pitagora variano sfrenatamente l'una dall'altra, ma tutte attestano che la sua persona e il suo volto in particolare emanavano una straordinaria radiosità.

Per sviluppare la mia tesi, devo parlare della matematica dell'antichità. La mia conoscenza di questo campo è però superficiale, di seconda mano. E non c'è un "pur tuttavia" che segue a questa mia constatazione: voglio soltanto ammettere fin dall'inizio una debolezza in questa mia presentazione.

Non c'era la matematica prima di Pitagora, come non c'era il cristianesimo prima di Gesù. Il racconto che gli egiziani scoprirono la geometria a causa delle inondazioni annuali del Nilo è dello stesso genere del racconto di Newton e la mela. I babilonesi erano maghi della computazione: avevano almeno uno dei due metodi per generare ciò che chiamiamo ora i tripli di Pitagora (come Otto Neugebauer ha brillantamente dimostrato dalle tavolette cuneiformi della collezione Plimpton), potevano approssimare la radice quadrata di due a tante cifre sessagesimali quante volevano. Ma la questione della razionalità o dell'irrazionalità della radice quadrata di due non avrebbe avuto nessun senso per loro, perchè non avevano i numeri nella loro struttura concettuale. Non c'è da stupirsi di questo: davvero a quei tempi i numeri non esistevano ancora.

I numeri sono stati inventati – oppure "rivelati", come sosterrebbero i credenti – da Pitagora. Per lui i numeri sono divini, la sola vera divinità, la fonte di tutto quello che esiste nel mondo. Essi sono sacri, oggetti di autentica venerazione. Tale è la religione pitagorica, e tale è l'origine della matematica. È questa la religione dalla quale sono apostata.

E che religione straordinaria è questa! Se non fosse stato per Pitagora, a chi sarebbe mai venuto a mente che fosse cosa buona e giusta avere delle comunità di persone che si riunivano esclusivamente per riflettere e meditare con inusitata profondità su numeri e grandezze, e così cominciare a tessere una trama complessa di deduzioni formali che ben presto hanno oltrepassato l'immaginazione – un tessuto di ragionamento che ormai copre il globo e che si stende attraverso i millenni?

**Eudosso**

Platone si spinse fino in Sicilia per poter ottenere un manoscritto pitagorico. Platone era un tipo orribile, l'origine di un male persistente dal quale il mondo ancora non si è liberato, ma fu il maestro di Eudosso. Quando ebbi l'occasione di trovarmi nell'agorà di Atene, i pensieri di Socrate, di Platone, d'Aristotele, di San Paolo, dei grandi tragediografi greci che si affacciavano alla mia mente, svanirono come d'incanto con la consapevolezza che io stavo camminando dove una volta aveva camminato Eudosso! Eudosso è stato il più grande matematico di tutti i tempi. È stato lui ad inventare il metodo delle esauastioni (integrali definiti) che Archimede ha in seguito sviluppato con tanto successo. È stato lui che per primo enunciò il principio sottile che chiamiamo "l'assioma di Archimede", ma che Archimede medesimo attribuisce a Eudosso. Questo eccezionale matematico ha anche prodotto un lavoro estremamente complesso sul moto apparente dei pianeti e in pratica ha fondato la fisica matematica con un lavoro pionieristico sulla dinamica. Eppure nemmeno uno dei suoi manoscritti sopravvive!

Ma ancora non abbiamo parlato dell'invenzione più profonda di Eudosso. Con senso di grande costernazione i pitagorici avevano scoperto che il rapprto fra la diagonale del quadrato ed un suo lato non è un numero intero: la radice quadrata di due è irrazionale, con tutto il peso emozionale ed intellettuale che questa parola possiede. Era una vera crisi della religione. Se i numeri sono la sola divinità, la fonte di tutto, come potrebbe essere così? Dobbiamo forse ammettere nel panteon anche le grandezze? Sembra di sì, visto che la descrizione pitagorica del quadrivio, nel periodo successivo a questa sconvolgente scoperta, era la seguente:

| | |
|---|---|
| aritmetica: | numeri in riposo |
| musica: | numeri in moto |
| geometria: | grandezze in riposo |
| astronomia: | grandezze in moto |

Ma Eudosso eliminò il dualismo tra numero e grandezza. Ecco la sua idea: invece di dire che cosa *è* il rapporto fra due grandezze, basta specificare quando *due* di tali rapporti (che forse non esistono) *sono uguali.* Questo straordinario risultato intellettuale Eudosso l'ha ottenuto tramite una sottile quantificazione su tutti i numeri pitagorici. Eppure, malgrado questa costruzione del sistema dei numeri reali (positivi) fosse stata esposta negli *Elementi* in modo che tutti la potessero leggere, essa non fu capita, nemmeno da Galilei. Fu solamente nel secolo scorso che la costruzione fu inventata di nuovo da Richard Dedekind. Non conosco niente di simile nella storia del pensiero umano!

Eudosso in pratica definì una nozione d'ugualianza fra due cose come mezzo per costruire le cose stesse. Ecco un trionfo del formalismo, una vittoria della sintassi sopra la semantica!

### L'origine dei numeri

Dal punto di vista di una fede monoteista, respingiamo l'idea religiosa di numeri come enti divini e increati. Allora che cosa sono i numeri? Sono forse stati creati? Ho scritto altrove:

> Il detto famoso di Kronecker, che Dio creò i numeri, tutto il resto è l'opera dell'uomo, presumabilmente non era da prendersi sul serio. Nel libro di Genesi, non troviamo infatti il passaggio:
>
> "E Dio disse: 'Ci siano i numeri!' E i numeri furono, dispari e pari Egli li ha creati. E disse loro: 'Siate fecondi e moltiplicatevi.' E comandò loro di ubbedire alle leggi d'induzione."

Tutta la creazione è contingente; l'essere di ogni cosa creata dipende dal volere del Creatore. Se i numeri sono increati, allora sono divini – questo lo respingiamo. Se i numeri sono stati creati, allora sono contingenti – questo lo troviamo assurdo. Che altra possibilità c'è? Semplicemente che non esistono i numeri – fino a che non vengono fabbricati da esseri umani. Nonostante l'asserzione di William Butler Yeats "Things out of perfection sail," ben pochi sosterebbero che il poema che comincia con questa frase esisteva prima dell'atto della sua composizione da parte di Yeats. Perchè allora noi matematici – artigiani come i poeti e i musici – descriviamo il nostro lavoro come scoperta invece che come invenzione? Questa è la religione pitagorica.

Come sarebbe il mondo se Dio non avesse creato i numeri? Sarebbe esattamente uguale a com' è ora. Non c'è la minima indicazione che i numeri siano stati creati. Se io ti do un problema di addizione quale:

$$\begin{array}{r} 37460225182244100253734521345623457115604427833 \\ +\ 52328763514530238412154321543225430143254061105 \\ \hline \end{array}$$

e tu sei il primo a risolverlo, allora avrai creato un numero che prima non esisteva.

Ma questa invenzione non farà grande sensazione nella communità dei matematici. Non è questo il tipo di numero al quale principalmente c'interessiamo. Più interessanti per noi sono gli $n$, $a$, $b$, $c$, e $d$ nel teorema di Lagrange:

$$\forall n\, \exists a\, \exists b\, \exists c\, \exists d\, [\, n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2\, ].$$

Questo si può leggere: “per ogni $n$ esistono $a$, $b$, $c$, e $d$ tali che $n$ è uguale a $a$ per $a$ più $b$ per $b$ più $c$ per $c$ più $d$ per $d$ – cioè, ogni numero è la somma di quattro quadrati. Che significa questa frase?

Significati diversi sono stati ascritti a questa formula. Mio padre – il cui lavoro all'Associazione Cristiana dei Giovani (YMCA), allora sita in Piazza Indipendenza qui a Roma, fu la causa della mia prima permanenza in questa città nel 1938, allorché frequentai la prima elementare in una scuola vicina a Piazza Pitagora – aveva l'abitudine, quando guidava, di osservare il numero sulla targa della macchina che ci precedeva e trovare a mente $a$, $b$, $c$, e $d$. Ecco allora un tentativo a dare un significato: una sfida o un insieme di sfide alla computazione. Il teorema infatti parla di *ogni* $n$.

### Una prima prospettiva sulla matematica: il realismo

Tradizionalmente il teorema aveva il significato che per ogni numero

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

esistono numeri $a$, $b$, $c$, e $d$ tali che $n$ è uguale alla somma dei loro quadrati. Fino all'inizio di questo secolo, con la critica intuizionista incisiva di L. E. J. Brouwer, questa interpretazione era accettata da quasi tutti come chiara e senza ambiguità. La matematica basata su questo concetto è chiamata *classica*. Molte prove della matematica classica dimostrano che esiste un'oggetto con una certa proprietà senza dare nessun modo di costruire un tale oggetto. Si dimostra che la supposizione che un qualsiasi oggetto non soddisfi la proprietà è insostenibile – la supposizione conduce ad una contradizione – e quindi si conclude che deve esistere un'oggetto che ha la proprietà in questione. Dunque la matematica classica è fondata sul concetto di oggetti matematici che esistono eternamente nella realtà platonica – o meglio, pitagorica.

### Una seconda prospettiva sulla matematica: l'intuizionismo

Nella prima parte di questo secolo, Brouwer attacò vigorosamente quest'interpretazione come priva di significato. L'intuizionismo è una forma di costruzionismo; dire che un'oggetto matematico esiste significa, per Brouwer, che si sa costruirlo.

Per la formula che riguarda i quattro quadrati, non esiste problema secondo Brouwer: dato $n$, i numeri $a$, $b$, $c$, e $d$ devono essere più piccoli di $n$, sicchè c'è solamente un insieme finito da ricercare. Questa frase arrogante “solamente un insieme finito” è molto comune fra i matematici, e mi sono divertito a sentirla pronunciare anche da mogli e mariti di matematici. Alla fine di questo secolo, colla venuta dei calcolatori digitali

– i quali, ci piaccia o no (a me sì), hanno un'influenza profonda sulla matematica – si può fare l'obbiezione che una tale ricerca non è fattibile: è possibile scrivere su un pezzo di carta un numero $n$ tale che nessun calcolatore, da ora fino al "'Big Crunch", al Grande Collasso, del nostro universo o qualsiasi altra fine sia tenuta in serbo per esso, potrà mai completare la ricerca di tutti i numeri $a$, $b$, $c$, e $d$ inferiori a $n$. Il problema da elucidare matematicamente per capire la natura di una computazione fattibile, effettiva, è attualmente al centro della ricerca matematica ed informatica ed è un problema davanti a cui tanto il realismo quanto l'intuizionismo sono impotenti.

La posizione di Brouwer fu vigorosamente criticata da Hilbert, che difese la matematica classica vestendo i panni del formalista. Un dibattito spiacevole, acrimonioso, e non necessario seguìa questa critica. (Prendo al volo quest'occasione per ringraziare gli organizzatori di quest' avvenimento che mi da l'opportunità di dibattere, in uno spirito ben diverso, col Professore De Giorgi. È un gran piacere per me, dopo tanti anni, d'incontrarlo finalmente di persona e di poter comunicare e discutere con lui le nostre idee sui fondamenti della matematica.) Il dibattito Brouwer-Hilbert non era necessario perchè ambedue partivano da una premessa sbagliata: quella che l'intuizionismo di Brouwer fosse una *limitazione* della matematica classica. Ma Gödel dimostrò in un'articolo breve, pubblicato due anni dopo lo storico teorema d'incompletezza del 1931, che in verità l'intuizionismo è un'*estensione* della matematica classica. Almeno, così è per l'aritmetica (teoria dei numeri), mentre meno si parla dell'analisi intuizionista meglio è.

Ecco una descrizione un poco – ma solo un poco – semplificata del ragionamento di Gödel. Per un'intuizionista, $\exists x\, \mathrm{A}(x)$ significa "so costruire un'$x$ con la proprietà $\mathrm{A}(x)$." Certo, questo implica $\neg\forall x\neg\, \mathrm{A}(x)$ : "non si da il caso che per ogni $x$ $x$ manchi della proprietà $\mathrm{A}(x)$"; anche se l'implicazione nel senso inverso certamente non è valida. Ma un realista interpreta $\exists x\, \mathrm{A}(x)$ come "nell'universo astratto pre-esistente degli oggetti matematici, esiste almeno uno di questi ogetti, $x$, con la proprietà $\mathrm{A}(x)$." E per il realista, questo equivale a $\neg\,\forall x\neg\, \mathrm{A}(x)$, che ha lo stesso significato tanto per il realista quanto per l'intuizionista $\big($ammesso che vadano d'accordo sul significato di $\mathrm{A}(x)\big)$. Similmente, per un'intuizionista $\mathrm{A}(x) \vee \mathrm{B}(x)$ significa "$x$ ha la proprietà $\mathrm{A}(x)$ oppure $x$ ha la proprietà $\mathrm{B}(x)$, e so dire quale dei due casi è valido." Questo è più forte di $\neg[\mathrm{A}(x)\ \&\ \mathrm{B}(x)]$ – cioè, "non si da il caso che $x$ manchi della proprietà $\mathrm{A}(x)$ e $x$ manchi della proprietà $\mathrm{B}(x)$." Ma per il realista, tutt'e due significano la stessa cosa nel cielo pitagorico. Gödel ci dice essenzialmente: per ogni formula $\exists x\, \mathrm{A}(x)$ in una prova classica, sostituite $\neg\forall x\neg\, \mathrm{A}(x)$ e per ogni $\mathrm{A}(x) \vee \mathrm{B}(x)$, sostituite $\neg[\neg\, \mathrm{A}(x)\ \&\ \neg\, \mathrm{B}(x)]$. Il realista sarà contento, perchè per lui le formule sono equivalenti; l'intuizionista accetta le sostituzioni come spiegazione dell'intendimento del realista. E allora risulta (e questo è un fatto indipendente da qualsiasi prospettiva sulla matematica) che la prova classica trasformata in questo modo diventa una prova intuizionista del teorema trasformato!

Alla luce del risultato di Gödel, possiamo dire che quello che veramante ha fatto Brouwer era di estendere la matematica classica tramite la creazione di due nuovi operatori logici: l'*esiste costruttivo* e l'*oppure costruttivo*, operatori più forti di quelli classici correspondenti. Sfortunatamente l'articolo di Gödel non ha ricevuto l'attenzione o l'interpretazione dovuta, e l'alterco squallido si è prolungato.

## Una terza prospettiva sulla matematica: il formalismo

Il formalismo ha una risposta semplice alla questione del significato di

$$\forall n \, \exists a \, \exists b \, \exists c \, \exists d \, [\, n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \,] :$$

non significa niente. (Voglio subito chiarire un punto. Forse sarebbe meglio dire che la formula non denota niente. La matematica, come la musica, è significativa, ma oramai non si dice più dei passaggi di un brano musicale: questo denota un'uccellino e quello denota un venticello. Ma i non-formalisti insistono ancora oggi a dare una denotazione a ogni passaggio di matematica.) I simboli nella formula sono segni sulla carta, e il compito del matematico è l'inventare concatenamenti profondi e belli di tali segni secondo certe regole strette. Quando si discute la matematica, si può parlare in termini di verità o delle immagini visuali, ma questo è senza rapporto col fare la matematica quanto la critica dell'arte è senza rapporto col fare l'arte.

Hilbert si chiamava un formalista, e infatti ha coronato la sua carriera con lavori profondi e brillanti sui fondamenti della matematica dalla prospettiva formalista. C'è comunque ogni ragione di sospettare che Hilbert non abbia mai rinunciato alla fede pitagorica, che per lui, cioè, il formalismo sia stato essenzialmente una tattica nella battaglia contro Brouwer.

Concludo con un'apologia breve ma appassionata del formalismo.

Come descrizione di quello che, durante un periodo di ben più di due millenni, i matematici hanno sempre fatto e sempre curato, la formulazione formalista della matematica è giusta e non trascura niente. È alla ricerca delle prove che dedichiamo le nostre vite; se una prova si conforma alle regole formali, è corretta; se no, non è una prova e non vale nulla a meno che non suggerisca il modo di scoprire una prova. Nessun'altro campo d'attività umana ha mantenuto un tale consenso per un'estensione di spazio e di tempo così vasta.

Il formalismo nega rilevanza di verità alla matematica. Ma, si potrebbe obbiettare, la matematica funziona – l'evidenza è dappertutto.

Questo fatto non implica forse che la verità si trova nella matematica? Nemmeno in parte. Supponiamo di scoprire un popolo primitivo, oppure di scoprire un popolo avanzato, ma, in ogni caso un popolo con una prospettiva sul mondo completamente diversa dalla nostra, e supponiamo che questo popolo abbia un'erba molto efficace contro una certa malattia. Questo popolo spiega l'efficacia della sua erba in termini dell'azione divina degli *shuki* sulle *okrus* del corpo (parole intraducibili per noi). Ammettiamo ora di scoprire che l'erba è in grado di guarire i malati anche nella nostra società. Quanta evidenza deriva da questo fatto per giustificare la credenza negli *shuki*? Nessuna. La sintassi è corretta; la semantica non conta. Ed è così anche con la matematica. Funziona. Ma questo fatto non fornisce alcuna evidenza per credere che la religione della matematica contenga anche un solo grano di verità.

Nella matematica, la realtà si trova nelle espressioni simboliche stesse, non nelle entità astratte che le espressioni sono supposte di denotare. Il simbolo $\exists$ è semplicemente un E a rovescio. Se concludiamo che una certa entità esiste solo perchè abbiamo costruito in un certo sistema formale la prova di una certa formula che comincia per $\exists$, lo facciamo a nostro rischio e pericolo. La dimora del significato è la sintassi; la semantica è la casa dell'illusione.

Come posso continuare a essere matematico quando ho perduto la fede nella semantica della matematica? Perchè dovrei voler continuare a fare matematica se non credo più che esistono i numeri e i processi stocastici e gli spazi di Hilbert? Rispondo con un'altra domanda: e perchè un compositore dovrebbe voler comporre la musica se poi essa è non-rappresentazionale? La matematica è l'ultima delle arti a diventare non-rappresentazionale.

Lentamente, dunque, la matematica comincia a diventare non-rappresentazionale. Lentamente nei dipartimenti di matematica, ma rapidamente nei dipartimenti d'informatica. Coloro che fanno informatica sanno di inventare invece di scoprire, e fabbricano dei risultati belli e profondi sulla natura delle computazioni fattibili. Se noi che ci troviamo nei dipartimenti tradizionali non vogliamo mancare alla partenza della nave, ci conviene sellare un cavallo formalista senza indugio.

Le credenze astratte influenzano le azioni concrete. Nonostante la completa mancanza di giustificazione, la prospettiva semantica sulla matematica – la scoperta di proprietà di entità che esistono in un mondo pitagorico – ha servito abbastanza bene la matematica durante un lungo periodo. Ma ora è il momento di andare avanti, di scartare la prospettiva semantica, e di concentrarci sul reale nella matematica. E ciò che è reale nella matematica è la notazione, non la denotazione imaginata.

Che sia sufficiente un solo breve esempio. La creazione da parte di Abraham Robinson dell'analisi non-standard era una semplificazione e un'estensione rivoluzionarie della pratica matematica, ma la communità matematica è stata molto lenta, o persino avversa, ad adottarla. La ragione è che l'analisi non-standard è contraria alla religione pitagorica.

Siamo troppo timidi. Se non possiamo pervenire alla profondità di Eudosso, possiamo almeno emulare la sua prontezza ad opporsi alle opinioni universalmente sostenute.