פונקציות ממשיות - פתרון לשאלה 8 בתרגיל 3

סעיף א

יהיו $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ כל הרציונלים ב- $[0,1]$. נסמן

$$S(\varepsilon)=[0,1]\cap\bigcup_n\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

עבור $\varepsilon>0$, אזי $S(\varepsilon)$ קבוצה פתוחה וצפופה. כמו כן,

$$m(S(\varepsilon))<\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}<2\varepsilon.$$

מכיוון ש- $m(S(0))=0, m(S(1))=1$ ו- $m(S(\varepsilon))$ פונקציה רציפה ב- ε (אפילו פונקציית ליפשיץ), לכל $a\in(0,1)$, אפשר למצוא קבוצה פתוחה צפופה בקטע $[0,1]$ שמידתה בדיוק a. עתה, תהי S_1 קבוצה פתוחה צפופה בעלת מידה $\frac{1}{2}$. זו קבוצה פתוחה, לכן איחוד של קטעים זרים. בכל קטע ב- S_1 נבחר קבוצה צפופה פתוחה בעלת מידה $\frac{3}{4}$. לאיחוד קבוצות אלה נקרא S_2. גם S_2 היא צפופה ופתוחה. אפשר לדרוש ש- S_2 לא תכיל שום קטע באורך גדול מ- $\frac{1}{2}$ (אם יש כזה קטע, נוריד קצת מאמצע הקטע, ונוסיף קצת במקום אחר) נחזור על התהליך עם $\frac{7}{8}$ ונקבל את S_3, שהיא פתוחה, צפופה, בעלת מידה $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{7}{8}$ ואינה מכילה אף קטע באורך גדול מ- $\frac{1}{3}$. נמשיך, ונגדיר לבסוף $S=\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$. אזי, $m(S)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>0$. עתה, לכל קטע I, הוא בהכרח מכיל איזשהו קטע J שמוכל באיזשהו S_n (כי S_n צפופה, ואיחוד של קטעים זרים באורך קטן מ- $\frac{1}{n}$). לכן,

$$m(S\cap I)\geq m(S\cap J)=m(J)\prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)>0.$$

כמו כן, הוצאנו מ- J קבוצה בעלת מידה חיובית, ולכן גם $m(S^c\cap I)\geq m(S^c\cap J)>0$.

סעיף ב

ברור ש- 1_A מדידה לבג וחסומה, לכן אינטגרבילית לבג. נניח ש- f שקולה ל- 1_A. נראה ש- f לא רציפה בשום מקום. לכל קטע J,

$$m(J\cap\{x;1_A(x)=1\})>0$$

וגם $m(J\cap\{x;1_A(x)=0\})>0$. לכן, $\sup_J f=1,\inf_J f=0$. זה נכון לכל קטע J, קטן ככל שיהיה. לכן f לא רציפה באף נקודה, ואינה אינטגרבילית רימן.