# פונקציות ממשיות - פתרונות לחלק מתרגיל 2

1. הראו שאם $E \subset \mathbb{R}$ מדידה, גם $E + y = \{x + y; x \in E\}$ מדידה לכל $y \in \mathbb{R}$.
2. ראינו שאם $E_n \subset \mathbb{R}$ קבוצות מדידות כך ש- $E_{n+1} \subset E_n$ לכל $n$ ו- $m(E_1) < \infty$ אז
$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \tag{1}$$
הראו ש- (1) לא בהכרח מתקיים כאשר $m(E_1) = \infty$.
3. תהיינה $E_1, .., E_n \subset (0,1)$ קבוצות מדידות כך ש- $\sum_{i=1}^{n} m(E_i) > n-1$. הוכיחו ש-
$$m\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) > 0$$
4. הראו שלכל קבוצה $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים
$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i]\right\} = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\}$$
5. תהי $E \subset [0,1]$ קבוצה מדידה כך ש- $m(E) = \frac{1}{2}$. הוכיחו כי קיימת $c \in (0,1)$ כך ש- $m(E \cap [0,c]) = \frac{1}{3}$.
6. תהי $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ משפחה של תת קבוצות מדידות של $\mathbb{R}$ כך ש- $m(B_\alpha) > 0$ לכל $\alpha \in A$, וגם $B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$ לכל $\alpha \neq \beta \in A$. הוכיחו ש- $A$ בת מנייה.
7. יהי $x$ ממשי. נאמר ש- $\frac{p}{q}$ ($p, q$ שלמים זרים) הוא קירוב טוב של $x$ אם
$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^3}$$
נאמר ש- $x$ הוא מספר קל לקירוב רציונלי אם יש לו אינסוף קירובים טובים.
הוכיחו שקבוצת המספרים הקלים לקירוב רציונלי היא בעלת מידה אפס.
רשות: הראו שקיים מספר אי-רציונלי שהוא קל לקירוב רציונלי.
8. תהי $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ פונקציה עולה ורציפה, כך ש- $f(0) = 1$. נסמן
$$E = \left\{x > 0; f\left(x + \frac{1}{f(x)}\right) > 2f(x)\right\}$$
הוכיחו ש- $E$ מדידה, וש- $m(E) \leq 2$.[1]
   (א) תהי $f$ פונקציה. הוכיחו שקבוצת נקודות הרציפות שלה מדידה.
   (ב) תהי $f$ פונקציה רציפה. הוכיחו שקבוצת נקודות הגזירות שלה מדידה.

[1] רמז: נסמן $r_0 = \inf E$ ולכל $i \geq 1$, נגדיר $r_i = \inf\left\{x \in E; x > r_{i-1} + \frac{1}{f(r_{i-1})}\right\}$. הוכיחו ש- $E \subset \bigcup_i [r_i, r_i + \frac{1}{f(r_i)}]$. מה תוכלו לומר על קצב הגידול של $f(r_i)$?