L'infinito nell'aritmetica

Edward Nelson

Dipartimento di matematica

Università di Princeton

Poi lo condusse fuori e gli disse:

≪Guarda il cielo e conta le stelle

se le puoi contare≫.

E soggiunse:

≪Tale sarà la tua discendenza≫.

Genesi 15.5

Si usano i numeri per contare.

Cos'è un numero?

Una prima risposta è che

i numeri sono 0, 1, 2, 3, . . . ,

un nostro amico, . . .

e così via all'infinito.

Il più antico problema aperto della matematica

Un numero è detto *perfetto* quando è la somma dei suoi divisori.

Per esempio, i divisori di 6 sono 1, 2, e 3, e infatti

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

Anche 28 è perfetto:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Questo concetto risale a Pitagora
(c. 582 – c. 507 AC).
Gli antichi conoscevano quattro numeri perfetti:
6, 28, 496, e 8128.

Detto così, sembra un fatto banale.
Ma c'è una struttura molto bella nascosta dentro.

(La bellezza nella matematica è una bellezza *concettuale*).

Un numero è detto *numero primo*
se non ha divisori.

Per esempio,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

sono numeri primi.

Euclide (c. 325 – 265 AC) stesso
dimostrò che esiste un'infinità di numeri primi.

Le *potenze di due* sono

1	
2	
4	[4-1=3 è un numero primo]
8	[8-1=7 è un numero primo]
16	
32	[32-1=31 è un numero primo]
64	
128	[128-1=127 è un numero primo]
...	

Un numero primo della forma
una potenza di due meno uno
[cioè, $2^n - 1$]
(ad esempio, 3, 7, 31, 127),
è detto oggi un *numero primo di Mersenne*
(monaco, matematico, teologo, ... 1588 – 1648).

Euclide dimostrò che se
$2^n - 1$ è un numero primo di Mersenne,
allora $2^{n-1} \times (2^n - 1)$
è un numero perfetto.

$2^{2-1} \times (2^2 - 1) = 2 \times 3 = 6$
$2^{3-1} \times (2^3 - 1) = 4 \times 7 = 28$
$2^{5-1} \times (2^5 - 1) = 16 \times 31 = 496$
$2^{7-1} \times (2^7 - 1) = 64 \times 127 = 8128$
sono perfetti.

È importante notare che Euclide dimostrò il suo teorema non solo per i quattro numeri primi di Mersenne conosciuti a quell'epoca, ma per *ogni* numero primo di Mersenne.

Oggi ne conosciamo 43, e dunque conosciamo 43 numeri perfetti, compreso il nostro amico [uguale a $2^{2280} \times (2^{2281} - 1)$].

Il più grande numero perfetto che conosciamo nell'agosto di 2006 è $2^{30402456} \times (2^{30402457} - 1)$.

Esiste un'infinità di numeri perfetti?
Non sappiamo.
La questione non ha nessun significato prattico,
(almeno, non che io sappia),
ma qui ci troviamo di fronte all'infinito.

I matematici dedicano la vita alla ricerca
di tali problemi. Personalmente, io non
mi troverò imbarazzato *da questo* quando
il Signore mi chiederà:
«Che hai fatto con la vita che ti ho dato?».

Più di due mila anni dopo Euclide,
Euler (il più grande
matematico del settecento, 1707 – 1783)
dimostrò che ogni numero perfetto *pari*
è della forma di Euclide.

Esiste un numero perfetto dispari?
La questione è stata sollevata esplicitamente
da Cartesio (1596 – 1650, matematico,
compagno di scuola di Mersenne, . . .).
Non sappiamo.

(Ma non provare con una matita: un numero
perfetto dispari deve avere almeno 500 cifre.)

Dopo più di due millenni di lavoro
sui numeri perfetti, la nostra ignoranza
è infinita.

Il triangolo di Pascal

Ecco quello che noi chiamiamo
il triangolo di Pascal.

Ma era conosciuto in Cina nel duecento
come il triangolo di Yang Hui,

in Persia nell'undicesimo secolo come
il triangolo di Omar Khayyam,

e nell'India come *il triangolo di Pingala*
(c. 450 AC).

Blaise Pascal (1623 – 1662) ci è ben noto
come filosofo e scrittore cristiano,
ma era anche un grande matematico e fisico.

Omar Khayyam (1048 – 1131) è noto nell'occidente principalmente come poeta, autore del *Rubaiyyat*:

Mai l'intelletto mio si distaccò dalla scienza,
pochi segreti ci sono che ancor non mi son disvolati,
e notte e giorno ho pensato per lunghi settantadue anni,
e l'unica cosa che seppi è che mai nulla ho saputo.

Ma era anche un grande matematico e astronomo.

Perchè parlo del triangolo di Pascal?

È di grande importanza nell'algebra,
ma ora guardiamo soltanto il *disegno*
che fanno i numeri pari e i numeri dispari.

Ecco ancora lo stesso disegno.

Il processo continua all'infinito,
ed è uno dei primi esempi di un frattale,
chiamato il triangolo di Sierpinski (1882 – 1969).

I frattali interessano i matematici
perché sono di una complessità infinita,
che però risulta dall'iterazione di un
processo *semplice*.

Inoltre sono belli!
1 2 3 4

(Immagini da
`sprott.physics.wisc.edu/fractals.htm`)

I fondamenti dell'aritmetica

Il fatto che
$2^{30402456} \times (2^{30402457} - 1)$
sia un numero perfetto
risulta da un *calcolo*,
ma i teoremi di Euclide e Euler
risultano da *ragionamenti*.

Quali metodi sono validi per ragionare
sull'infinità dei numeri?

Nel ottocento, due grandi matematici,
Richard Dedekind (1831 – 1916)
e Giuseppe Peano (1858 – 1932)
hanno avuto il coraggio di affrontare il problema:

che cos'è un numero?

Gli assiomi di Peano si possono esprimere così:

0 è un numero;

ogni numero ha un successore;

0 non è il successore di nessun numero;

due numeri diversi hanno successori diversi;

e il *principio d'induzione*:

Se una proprietà è vera per 0,
e se è vera per il successore
di ogni numero per cui è vera,
allora la proprietà è vera per ogni numero.

Non do esempi – basta con la matematica tecnica!
Ma voglio concludere con
qualche osservazione generale.

I numeri dovrebbero essere cose chiare e concrete, ma la spiegazione del concetto di numero invoca il concetto vago e astratto di *proprietà*. Che significa?

È stato necessario precisare l'assioma d'induzione, specificando un linguaggio nel quale si esprimono le proprietà.

Aristotele (384 – 322 AC)
disse che l'infinito è sempre *potenziale*,
mai *attuale*,
e aveva pienamente ragione.

I lavori di Dedekind, Peano, e altri
matematici e logici
erano un tentativo di catturare
l'infinito potenziale dei numeri
in un sistema infinito attuale.

Allo stupore dei matematici, il tentativo
non è riuscito.

Due teoremi di Gödel (1906 – 1978)
sono pertinenti.

Risulta dal famoso teorema di *com*pletezza
che non è possibile precisare
la nozione di ≪ogni proprietà≫.

Dal famosissimo teorema di *incom*pletezza
risulta che non si può dimostrare la coerenza
dell'aritmetica di Peano per mezzi elementari.

Le stelle, e la discendenza di Abraamo,
sone creazioni divine, di un'infinità potenziale.

L'aritmetica è una creazione umana,
e se crediamo di aver catturato
l'infinito attuale nel nostro sistema,
c'inganniamo.

Guarda il cielo e conta le stelle
se le puoi contare.