第二卷 第一期 数学季刊 Vol.2 No
1987年 3月 Chinese Quarterly Journal of Mathematics March 198

一维边值问题有限元法的后验误差估计*

黄鸿慈 鄂维南

(中国科学院计算中心)

一维情形的h-version有限元的后验误差估计以及由此产生的自适应算法对线性元已经相当成熟，代表性工作见参考文献。这里给出另外一种处理方法，这种处理除了把原有冗长的证明大大压缩以外，并可同时给出高次元的后验误差估计。

问题

$$\begin{cases} Lu=-\dfrac{d}{dx}\left(a(x)\dfrac{du}{dx}\right)+b(x)u=f(x), \quad x\in I=(0,1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中$a(x)\ge \underline{a}>0$，$\underline{a}$常数，$b(x)\ge 0$.

设a，$b\in L^\infty(I)$，则

$$B(u,v)=\int_0^1(au'v'+buv)dx$$

为$H_0^1(I)\times H_0^1(I)\to R^1$的双线性型。问题(1)的弱解形式为

$$B(u,v)=\int_0^1 f\cdot v dx, \quad \forall v\in H_0^1(I)$$

引进能量模

$$\|u\|_E=B(u,u)^{1/2}$$

作为讨论误差的度量。

设Δ为区间I的一个分割

$$\Delta: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$$

$$I_j=(x_j,x_{j+1}), \quad h_j=x_{j+1}-x_j, \quad j=0,\cdots,n-1$$

设$S_0^p(\Delta)$为对应分割Δ的p次C^0元的分片多项式空间，u_Δ是问题(1)在$S_0^p(\Delta)$中的有限元解，即$u_\Delta\in S_0^p(\Delta)$，满足

$$B(u_\Delta,v_\Delta)=\int_0^1 f\cdot v_\Delta dx, \quad \forall v_\Delta\in S_0^p(\Delta)$$

先考虑一个简单情形：$a(x)=1$，$b(x)=0$，这时问题(1)简化为

$$\begin{cases} \tilde{L}w=-\dfrac{d^2w}{dx^2}=g, \quad x\in I \\ w(0)=w(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

---

* 1986年10月3日收到

$\bar{B}(\cdot,\cdot)$及$\|\cdot\|_E$分别表示问题（2）的双线性型及能量模，w_Δ为（2）在$S_0^p(\Delta)$的有限元解。

引理1　问题（2）在$S_0^p(\Delta)$中的有限元解w_Δ满足条件：

(i)　$w_\Delta(x_j)=w(x_j)$，　$j=0,\cdots,n$

(ii)　在I_j上，w_Δ'是w'在（$P-1$）次多项式空间的L_2投影。

证明　先证在$S_0^p(\Delta)$中满足（i）（ii）的函数是存在的。为此，记P_j为（ii）所规的投影算子，由于$w'\in L^2(I)$，故P_jw'存在。令

$$w_j(x)=w(x_j)+\int_{x_j}^{x}P_jw'dx,\quad x\in I_j,\ j=0,\cdots,n-1 \tag{3·a}$$

然

$$w_j(x_j)=w(x_j) \tag{3·b}$$

P_j定义有$\int_{I_j}(w'-P_jw')dx=0$，故又推得

$$w_j(x_{j+1})=w(x_{j+1}) \tag{3·c}$$

义

$$w_\Delta(x)=w_j(x),\quad x\in I_j,\ j=0,\cdots,n-1$$

（3·a）（3·b）（3·c）可看出$w_\Delta\in S_0^p(\Delta)$并满足（i）（ii）。现只需证$w_\Delta$是问题2）的有限元解。对任意$v_\Delta\in S_0^p(\Delta)$，$v_\Delta'$是$I_j$上次数不大于（$P-1$）的多项式，故有

$$\int_0^1(w'-w_\Delta')\cdot v_\Delta'dx=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{I_j}(w'-P_jw')\cdot v_\Delta'dx=0$$

毕。

由引理1，可看出w_Δ在I_j上的值完全由w在I_j上的值确定，因此局部误差估计容易得。令

$$\sigma=w-w_\Delta$$

$$\sigma_j^2=\|\sigma\|_{E,I_j}^2=\int_{I_j}(w'-w_\Delta')^2dx$$

果（2）的真解w在I_j上是（$p+1$）次多项式，不妨设首项系数为1，由引理1的（ii），时有

$$\sigma_j^2=\min_{\varphi\in\Pi_{p-1}}\int_{I_j}[(P+1)x^p-\varphi]^2dx$$

$_{p-1}$表示全体次数不大于（$p-1$）的多项式。由Legendre多项式理论，得

$$\sigma_j^2=(P+1)^2L_P^2\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\right)^{2p+1}$$

中L_P是首项系数为1的P次Legendre多项式在区间（-1，1）上的L_2模，即

$$L_P=\frac{2^{2P+1}}{2P+1}\frac{(P!)^4}{[(2P)!]^2}$$

而

$$\sigma_j^2=\frac{1}{2P+1}\left[\frac{(P!)(P+1)!}{(2P)!}\right]^2h_j^{2p+1}$$

多项式w首项系数不为1时，σ_j^2可表为

$$\sigma_j^2=\frac{1}{2P+1}\left[\frac{P!}{(2P)!}\right]^2h_j^{2P+1}[w^{(P+1)}(x)]^2 \tag{4}$$

引理2　设问题（2）的解$w\in C^{p+2}(\bar{I})$，则有

$$\sigma_j^2=\int_{I_j}(w'-w_\Delta')^2dx=\frac{1}{2p+1}\left[\frac{p!}{2p!}\right]^2h_j^{2p+1}[w^{p+1}(x_{j+\frac12})]^2+o(h_j^{2p+2}) \tag{5}$$

其中$x_{j+\frac12}=(x_j+x_{j+1})/2$.

证明　令w_j为w在I_j上的（$p+1$）次插值多项式，于是

$$\|w-w_j\|_{p+1,\infty,I_j}\le Ch_j\|w\|_{p+2,\infty,I_j}$$

由引理1的（i），可在I_j上利用有限元的最大模估计

$$\begin{aligned}\|(w-w_j)-(w-w_j)_\Delta\|_{1,\infty,I_j}&\le Ch_j^p\|w-w_j\|_{p+1,\infty,I_j}\\&\le Ch_j^{p+1}\|w\|_{p+2,\infty,I_j}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\sigma_j^2&=\int_{I_j}(w'-w_\Delta')^2dx\\&=\int_{I_j}(w-w_j'+w_j'-(w_j)_\Delta'+(w_j)_\Delta'-w_\Delta')^2dx\\&=\int_{I_j}(w_j'-(w_j)_\Delta'+o(h_j^{p+1}))^2dx\\&=\int_{I_j}(w_j'-(w_j)_\Delta')^2dx+o(h_j^{2p+2})\end{aligned}$$

根据（4）并注意到$w_j^{(p+1)}(x)$与$w^{(p+1)}(x_{j+\frac12})$差一高阶量，即可得到（5），证毕。

现回到讨论问题（1）。取问题（2）的右端$g=-u''$，则（1）和（2）的解相同。记

$$e=u-u_\Delta,\quad e^*=u-u_\Delta^*$$

u_Δ^*是问题（2）的有限元解。

引理3　设$a\in C^1(\bar{I})$，$b\in L^\infty(I)$，则有

$$\|u_\Delta-u_\Delta^*\|_E\le Ch_\Delta^{1/2}\max\sigma_j \tag{6}$$

这里$h_\Delta=\max_j h_j$，$\sigma_j^2=\int_{I_j}\left(\frac{de^*}{dx}\right)^2dx$，常数$C$只与算子$L$有关。

证明　对$v_\Delta\in S_0^p(\Delta)$，成立

$$\begin{aligned}B(u_\Delta-u_\Delta^*,v_\Delta)&=B(e^*-e,v_\Delta)=B(e^*,v_\Delta)\\&=\sum_j\int_{I_j}a\frac{de^*}{dx}\frac{dv_\Delta}{dx}dx+\sum_j\int_{I_j}be^*v_\Delta dx\\&=\sum_j\int_{I_j}(a(x)-a_{j+\frac12})\frac{de^*}{dx}\frac{dv_\Delta}{dx}dx+\sum_j\int_{I_j}be^*v_\Delta dx\end{aligned}$$

后一等式利用了引理1的（ii），这里$a_{j+\frac12}=a(x_{j+\frac12})$。于是有

$$|B(u_\Delta-u_\Delta^*,v_\Delta)|\le\sum_j\int_{I_j}Ch_j\left|\frac{de^*}{dx}\frac{dv_\Delta}{dx}\right|dx+\sum_j\int_{I_j}|be^*v_\Delta|dx \tag{7}$$

用Nitsche技巧得

$$\int_{I_j}b(e^*)^2dx\le Ch_j^2\int_{I_j}\left(\frac{de^*}{dx}\right)^2dx \tag{8}$$

现取$v_\Delta=u_\Delta-u_\Delta^*$，则由（7）（8）可得

$$\|u_\Delta-u_\Delta^*\|_E^2$$

$$\le Ch_\Delta\max_j\left(\int_{I_j}\left(\frac{de^*}{dx}\right)^2dx\right)^{1/2}\cdot\sum_j\left\{\int_{I_j}[(u_\Delta'-u_\Delta^{*\prime})^2+(u_\Delta-u_\Delta^*)^2]dx\right\}^{1/2}$$

利用$\sum_{j=1}^{n}\xi_j \le \sqrt{n}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2}$即得

$$\|u_\Delta-u_\Delta^*\|_E^2\le Ch_\Delta^{1/2}\max_j\sigma_j\|u_\Delta-u_\Delta^*\|_E$$

从而得到（6），证毕。

引理4 设$a\in C^1(\bar I)$，$b\in L^\infty(I)$，则有

$$\sum_j a_{j+\frac12}\sigma_j^2-Ch_\Delta\max_j\sigma_j^2\le\|e(\Delta)\|_E^2\le\sum_j a_{j+\frac12}\sigma_j^2+Ch_\Delta\max_j\sigma_j^2 \tag{9}$$

证明：首先有

$$\|e\|_E^2=\|e^*\|_E^2-\|u-u_\Delta^*\|_E^2$$

$$=\sum_j\int_{I_j}\left[a\left(\frac{de^*}{dx}\right)^2+b(e^*)^2\right]dx-\|u_\Delta-u_\Delta^*\|_E^2$$

由引理3及条件$a\in C^1(\bar I)$可得不等式的左半部分，由引理3及不等式（8）可得不等式的右半部分，证毕。

至此，从引理2及引理4得到本文的主要结果如下：

定理 若$a\in C^1(\bar I)$，$b\in L^\infty(I)$，$u\in C^{p+2}(\bar I)$，则p次元的解u_Δ有误差估计式

$$\|u-u_\Delta\|_E^2=\sum_j\frac{a_{j+\frac12}}{2p+1}\left(\frac{p!}{2p!}\right)^2u^{(p+1)}(x_{j+\frac12})^2h_j^{2p+1}(1+O(h_\Delta)) \tag{10}$$

其中大O项的界只与算子L有关。

当$p=1$时，即得到[1]中的结果

$$\|u-u_\Delta\|_E^2=\frac{1}{12}\sum a_{j+\frac12}u''(x_{j+\frac12})^2h_j^3(1+O(h_\Delta)) \tag{11}$$

文[1]从（11）出发，得到所谓"平衡原理"，作为构造网格自适应剖分的理论依据。现在得到了一般的p次元的误差的估计式，也有同样的作用。在（10）中给出的还不是后验量，但可用如下方法解决：从微分方程 $-(au')'+bu=f$得到

$$u''=\frac{1}{a}(-f-a'u'+bu)$$

$$u'''=\frac{1}{a}(-f-2a'u''-a''u'+bu'+b'u-f')$$

$$\vdots$$

于是p次元时（10）中用到的（$p+1$）次导数可通过p次以下的导数表示，然后用有限元解u_Δ相应的导数代替。

参 考 文 献

1. I. Babuska, W. C. Rheinboldt, "Analysis of Optimal Finite Element Meshes in R^1." Math, Comp. V01. 33, N0. 146, 1979 p. p. 435—463。
2. I. Babuska, W. C. Rheinboldt, "A posterior error analysis of finite element solutions for one-dimensional problems." SIAM J. Numer. Anal. 18, 1981, p. p. 565—589
3. I. Babuska, M., Vogelius, "Feedback and Adaptive Finite Element Solution for One-dimensional Boundary Value problems" Numer. Math. 44, 1984, p. p. 75—102。

A Posterior Error Estimates of the Fi Element Methods for One-Dimension Boundary Value Problems

Huang Hong-ci, E Wei-nan

(Computing Center, Academia Sinica)

Abstract

An alternative approach to the a posterior error estimates of the finite element methods for one-dimensional boundary value problems presented, This approach greatly simplifies the proofs of available re for linear element and naturally gives results on high order elements the same time.