有限元方法的后验误差估计

鄂维南 穆默 黄鸿慈
（中国科学院 计算中心）

有限元的误差分析理论已有丰富的成果，但一般以先验估计为主．这些理论对算法评价和指导计算无疑具有重要意义．但实际计算中常要求给出误差的定量估计，先验估计一般就做不到这一点，因为其中会有如微分方程解的导数等不可计算的量．后验误差估计的研究近年来已开始受到注意．在多重网格技术中基于误差渐近展开的外推可以给出逐点意义下的后验估计．（例如见〔1〕，〔2〕）另一条途径是通过局部化进行能量模意义下的后验误差估计[3]．其中对一维边值问题的研究已较成熟[4],[5],[6]．〔7〕就常系数平面弹性力学问题给出了双线性元解的后验估计．本文的分析适用于比较一般的二级椭圆问题和三角剖分上的p次 Lagrange 元．这方面的工作还可参考[8],[9],[10]等．其中〔10〕使用了不同的局部化方法．

设Ω是平面多角形区域．考虑二阶椭圆边值问题：

$$\begin{cases} Lu \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + bu = f, \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

假设 $a_{ij}=a_{ji}$; $|a_{ij}|_{0,\infty,\Omega}\leqslant\bar{a}$, $|b|_{0,\infty,\Omega}\leqslant\bar{b}$, $f\in H^{-1}(\Omega)$; $b\geqslant 0$, 且 $\exists\,\alpha>0$, 使

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,\quad \forall(\xi_1,\xi_2)\in \boldsymbol{R}^2,\quad \forall x\in\Omega.$$

与问题(1)等价的弱形式为：求 $u\in H_0^1(\Omega)$，使

$$a(u,v) \equiv \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + buv\right)dx = f(v),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

设Ω的规则三角剖分$\mathcal{T}_h$组成簇满足：

(i) $\exists\theta>0$，使

$$\forall K\in\bigcup_h \mathcal{T}_h \text{ 及 } K \text{ 的内角 } \tau,\ \tau\geqslant\theta, \tag{3}$$

(ii) $\exists\nu>0$ 使

$$\forall K\in\bigcup_h \mathcal{T}_h,\ h/h_K\leqslant\nu, \tag{4}$$

其中 h_K 表示单元 K 的直径，$h=\max\limits_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$

考虑 $\mathcal{T}_h$ 上的 p 次 Lagrange 元空间．$X_h\in H^1(\Omega)$．N_h 为 X_h 的节点集，

1987年10月14日收到

$w_P(P\in N_h)$ 为 X_h 的基函数：

$$w_P(Q)=\delta_{PQ},\quad \forall P,Q\in N_h$$

我们有

$$\sum_{P\in N_h} w_p(x)\equiv 1,\quad \forall x\in\Omega. \tag{5}$$

记 $S_P=\mathrm{supp}\,w_P$，$h_P=\mathrm{diam}\,S_P$，$\mu=\dfrac{2\pi}{\theta}$. 于是 S_P $(\forall P\in N_h)$ 中单元的个数不超过 μ，节点个数不超过 $\mathscr{K}=\dfrac{(p+1)(p+2)}{2}\mu$，$\bigcup_{P\in K} S_P(\forall K\in\mathscr{T}_h)$ 中单元的个数不超过 3μ. 且存在常数 c 使得：

$$\forall P\in N_h,\ \forall K\subset S_P,\ h_P\leqslant ch_K. \tag{6}$$

将 $S=\{S_P\}_{P\in N_h}$ 分解成互不相交的子集并：$S=\bigcup_{j=1}^{J}\chi_j$（称为 S 的一个分划），满足：

$$\mathring{S}_P\cap\mathring{S}_Q=\phi,\ \forall S_P,S_Q\in\chi_j\ P\neq Q,\ 1\leqslant j\leqslant J, \tag{7}$$

其中“$\circ$”表示区域的内部.

引理 1. 存在 S 的一种分划，使得 $J\leqslant\mathscr{K}$.

证. 任取 $S_{p1}\in S$. 令 χ_1 为 S 中使(7)成立且包含 S_{P1} 的极大子集. 因为 $\forall S_P\in S\backslash_1)$ 满足

$$\mathring{S}_P\cap\mathring{S}_Q\neq\phi \tag{8}$$

的 S_Q 的数目不超过

$$t_1=\mathrm{card}(\chi_1)\geqslant\mathrm{card}(S)/\mathscr{K}.$$

在 $S\backslash\chi_1$ 中任取 S_{P_2}，用类似的方法构造 χ_2. 因为 $\forall S_P\in S\backslash\chi_1$，满足（8）的 S_Q 中至少有一个在 χ_1 中(由 χ_1 的极大性)，故在 $S\backslash\chi_1$ 中满足(8)的 S_Q 不超过 $\mathscr{K}-1$ 个. 所以χ

$$t_2=\mathrm{card}(\chi_2)\geqslant(\mathrm{card}(S)-t_1)/(\mathscr{K}-1).$$

依此类推，

$$t_{j+1}=\mathrm{card}(\chi_{j+1})\geqslant(\mathrm{card}(S)-(t_1+t_2+\cdots+t_j))/(\mathscr{K}-j),\ j\leqslant\mathscr{K}-1.$$

当 $j=\mathscr{K}-1$ 时上式可变成：

$$\sum_{j=1}^{\mathscr{K}}\mathrm{card}(\chi_j)\geqslant\mathrm{card}(S).$$

故知 $J\leqslant\mathscr{K}$. 证毕.

注1. 对于逐步中点加密产生的剖分簇和线性元，由上述引理至多知道 $J\leqslant 18$，而我们在〔2〕中构造了一种分划使得 $J\leqslant 7$，往后所使用的分划总理解为使对应的 J 达到极小.

令 $X_{oh}=X_h\cap H_o^1(\Omega)$，问题(2)(或(1))相应的有限元逼近为：求 $u_h\in X_{oh}$，使

$$a(u_h,v)=f(v),\quad \forall v\in X_{oh}. \tag{9}$$

对误差 $e_h=u-u_h$ 按如下方式作局部化处理：$\forall P\in N_h$，令 $\eta_P\in\overset{\circ}{H}(S_P)=\{v\in H_0^1(\Omega),\ v\text{在}\ \Omega\backslash S_P\text{上为}\ 0\}$，

使得

$$a(\eta_P,v)=a(e_h,v),\ \forall v\in \tilde{H}(S_P). \tag{10}$$

令$\eta=\left(\sum_{P\in N_h}\|\eta_P\|_E^2\right)^{\frac{1}{2}}$，其中$\|\cdot\|_E=\sqrt{a(\cdot,\cdot)}$为能量模．我们要证明$\eta$在能量模的意义下是有限元解误差的等价估计量．

引理 2. $\forall v\in H_0^1(\Omega)$，$\exists v_h\in X_{0h}(\Omega)$，使

$$\sum_{P\in N_h}\|w_P(v-v_h)\|_{H^1(\Omega)}^2\leqslant c\|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \tag{11}$$

其中c是仅依赖于Ω,θ,ν,的常数．

证．按 Clement[11]的办法定义映射

$$\gamma_h:\ L^2(\Omega)\to X_h$$

如下：给定函数$v\in L^2(\Omega)$，T_pv记v到$\Phi_p(S_p)$的L^2投影(对所有$P\in N_h$)，其中$\Phi_P(S_P)$是S_P上p次 Lagrange 元空间．即：

$$T_Pv\in\Phi_P(S_P),\ \int_{S_P}(v-T_Pv)\varphi dx=0,\ \forall\varphi\in\Phi_p(S_P)$$

于是有不依赖于v和h的常数，使得

$$\forall P\in N_h,\ \forall v\in H^1(S_P),$$

$$|v-T_Pv|_{M,S_P}\leqslant ch_P^{l-m}|v|_{l,S_P},\ 0\leqslant m\leqslant l\leqslant p+1 \tag{12}$$

令$\gamma_hv=\sum_{P\in N_h}T_Pv(P)w_P\in X_h$．由关于剖分的假设有，存在常数$c$使得$\forall K\in\mathscr{T}_h$，$\forall\varphi\in\Phi_p(K)$，

$$|\varphi|_{m,\infty,K}\leqslant ch_K^{-(m+1)}\ |\varphi|_{0,K},\ m=0,1 \tag{13}$$

和$\forall P\in N_h$，$\forall K\subset S_P$，

$$|w_P|_{m,\infty,K}\leqslant ch_K^{-m},\ m=0,1 \tag{14}$$

$$\|w_P\|_{m,K}\leqslant ch_K^{1-m},\ m=0,1. \tag{15}$$

$\forall K\in\mathscr{T}_h$，任取一点$Q\in N_h\cap K$，有

$$(\gamma_hv-v)|_K=(T_Qv-v)|_K+\sum_{P\in K\cap N_h}(T_Pv(P)-T_Qv(P))w_P|_K.$$

从而对$v\in H'(\Omega)$，由(12)，(6)，(13)，(15)，有

$$\begin{aligned}\|\gamma_hv-v\|_{0,K}&\leqslant ch_Q\|v\|_{1,S_Q}+\sum_{P\in K\cap N_h}(T_Pv-T_Qv|_{0,\infty,K}\|w_P\|_{0,K}\\&\leqslant ch_K\|v\|_{1,S_Q}+c\sum_{P\in K\cap N_h}\|T_Pv-T_Qv\|_{0,K}\\&\leqslant ch_K\|v\|_{1,S_Q}+c\sum_{P\in K\cap N_h}(\|T_Pv-v\|_{0,K}+\|T_Qv-v\|_{0,K})\\&\leqslant ch_K\sum_{P\in K\cap N_h}\|v\|_{1,S_P}.\end{aligned} \tag{16}$$

类似地可证

$$\|\gamma_hv-v\|_{1,K}\leqslant c\sum_{P\in K\cap N_h}\|v\|_{1,S_P} \tag{17}$$

现构造定理所要求的逼近如下：

对给定多角形域 $\Omega\subseteq \boldsymbol{R}^2$，存在单位分解 $\{\psi_j\}_1^n$，$\psi_j\in C^\infty(\bar{\Omega})$；单位向量 $\{\nu_j\}_1^n$ 及适当的 $t_0>0$，$d_0>0$，使得，$\forall v\in H_0^1(\Omega)$，将其零延拓至全空间，有：

$$(1)\quad v=\sum_{j=1}^n v_j,\quad v_j=\psi_j v \tag{18}$$

(2) 对 $0\leqslant t\leqslant t_0$，$j=1,2,\cdots,n$，

$$v_{j,t}(x)\equiv v_j(x+t\nu_j)\subset H_0^1(\Omega) \text{ 且}$$

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega),\ \operatorname{supp} v_{j,t}\geqslant d_0 t. \tag{19}$$

对 $\mathscr{T}_h$，取 $t=h/d_0$。于是，

$$v_{j,t}|_{S_P}=0,\ \forall P\in N_h\cap\partial\Omega,$$

所以

$$T_P v_{j,t}=0,\ \forall P\in N_h\cap\partial\Omega.$$

于是，$\gamma_h v_{j,t}|\partial\Omega=0$. 令$v_h=\sum_{j=1}^n \gamma_h v_{j,t}\in X_{0h}$.

由(16)，(17) 及附录中的(1)，有

$$\|v-v_h\|_{s,K}\leqslant\sum_{j=1}^n \|\gamma_h v_{j,t}-v_{j,t}\|_{s,K}+\|v_{j,t}-v_j\|_{s,K})$$

$$\leqslant ch_K^{1-s}\sum_{j=1}^n\Big(\sum_{P\in K\cap N_h}\|v_{j,t}\|_{1,S_P}+\|v_j\|_{1,K_t}),\ \forall K\in\mathscr{T}_h,\ s=0,1, \tag{20}$$

其中 $K_t=\{x\in \boldsymbol{R}^2|\operatorname{dist}(x,K)<t\}$. 再由(13)及前述剖分的性质(类似地，有与 h 无关的常数 c，使得与 $K_t(\forall K\in\mathscr{T}_h)$ 相交的单元个数不超过 c)：

$$\sum_{P\in N_h}\|w_P(v-v_h)\|_{H^1(\Omega)}=\sum_{P\in N_h}\sum_{K\in S_P}(|w_P|_{1,\infty,K}\|v-v_h\|_{0,K}+|w_P|_{0,\infty,K}\|v-v_h\|_{1,K}$$

$$\leqslant c\sum_{j=1}^n\sum_{P\in N_h}\sum_{K\in S_P}\Big(\sum_{Q\in K\cap N_h}\|v_{j,t}\|_{1,S_Q}+\|v_j\|_{1,K_t}$$

$$\leqslant c\sum_{j=1}^n(\|v_{j,t}\|_{1,\Omega}+\|v_j\|_{1,\Omega})\leqslant c\|v\|_{1,\Omega}.$$

注 2. 〔7〕对矩形网格上的双线性元的特殊情形证明了上述引理. 〔3〕从另外的途径处理了三角剖分线性元，但证明尚有错误. 我们将在附录中重新给出正确的证明.

定理 3. 存在仅依赖于 Ω,θ,γ 的常数 c_L,c_u
使得

$$c_L\eta\leqslant\|e_h\|_E\leqslant c_u\eta. \tag{21}$$

证. 设分划 $S=\bigcup_{j=1}^J \chi_j$. 记

$$z_j=\sum_{S_P\in\chi_j}\eta_P,\quad j=1,\cdots,J.$$

于是，

$$a(e_h,z_j)=\sum_{S_P\in X_j}a(e_h,\eta_P)=\sum_{S_P\in X_j}a(\eta_P,\eta_P).$$

由于(7)，我们有

$$a(z_j,z_j)=\sum_{S_P\in X_j}a(\eta_P,\eta_P)=a(e_h,z_j).$$

所以

$$\|e_h\|_E^2\geqslant\|z_j\|_E^2=\sum_{S_P\in X_j}\|\eta_P\|^2.$$

从而

$$\sum_{P\in N_h}\|\eta_P\|_E^2\leqslant J\|e_h\|_E^2.$$

于是证得(21)的左端．现证另一端：$\forall v\in X_{oh}$,

$$\begin{aligned}a(e_h,e_h)&=a(e_h,e_h-v)\\&=\sum_{P\in N_h}a(e_h,w_P(e_h-v))\\&=\sum_{P\in N_h}a(\eta_P,w_P(e_h-v))\\&\leqslant\sum_{P\in N_h}\|\eta_P\|_E\|w_P(e_h-v)\|_E\\&\leqslant\eta\Big[\sum_{P\in N_h}\|w_P(e_h-v)\|_E^2\Big]^{\frac12}.\end{aligned}$$

由引理2并注意到$\|\cdot\|_E$是$H_0^1(\Omega)$上的等价模，有

$$\begin{aligned}\|e_h\|_E^2&\leqslant c\eta\inf_{v\in X_{oh}}\Big(\sum_{P\in N_h}\|w_P(e_h-v)\|_{H^1(\Omega)}^2\Big)^{\frac12}\\&\leqslant c\eta\|e_h\|_{H^1(\Omega)}\\&\leqslant c_u\eta\|e_h\|_E.\end{aligned}$$

由此证得(21)的右端．注意，c_u还依赖于对算子L的假设中的$\bar a$，$\bar b$和α．证毕．

这样，对$\|e_h\|_E$的估计便转化为计算一组局部量$\eta_P(P\in N_h)$，(10)可以写成

$$\eta_P\in\bar H(S_P),\ a(\eta_P,v)=f(v)-a(u_h,v),\ \forall v\in\bar H(S_P).\tag{22}$$

因此η_P是一个后验量．但η_P还不能直接计算，需在S_P上解一个局部问题，这是不方便的．下面在此基础上寻求一个更为易算的估计量．

若再设泛函$f\in H^0(\Omega)$，即

$$\exists f\in L^2(\Omega),\ f(v)=\int_\Omega fv\,dx,\ \forall v\in L^2(\Omega).$$

于是(22)可进一步写成．$\eta_P\in\bar H(S_P)$

$$a(\eta_P,v)=\sum_{K\subset S_P}\int_K(f-Lu_h)v\,dx+\sum_{\Gamma\subset S_P}\int_\Gamma J_\Gamma\Big(\frac{\partial u_h}{\partial n}\Big)v\,ds,\ \forall v\in\bar H(S_P),\tag{23}$$

其中$\sum_\Gamma$表示对S_P中所有单元之间的内边界求和．

$$J_\Gamma\left(\frac{\partial u_h}{\partial n}\right)=\sum_{i,j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\right)\bigg|_{\partial K_1\cap\Gamma}\nu_j^{K_1}+\sum_{i,j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\right)\bigg|_{\partial K_2\cap\Gamma}\nu_j^{K_2},$$

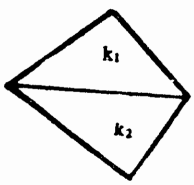

图1

其中 $\Gamma=\partial k_1\cap\partial k_2$，$(\nu_1^{K_1},\nu_2^{K_1})$，$(\nu_1^{K_2},\nu_2^{K_2})$ 分别是 Γ 上对应于单元 K_1 和 K_2 的单位外法向.

对 $P\in N_h$，定义

$$\varepsilon_P=\Big(\sum_{K\subset S_P}h_K^2\int_K(f-Lu_h)^2dx\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{\Gamma\subset S_P}h_\Gamma\int_\Gamma\Big(J_\Gamma\Big(\frac{\partial u_h}{\partial n}\Big)\Big)^2ds\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

引理 4. 存在常数，使

$$\|\eta_P\|_E\leqslant c\varepsilon_P. \tag{24}$$

证. 由(23)，

$$\|\eta_P\|_E^2\leqslant a(\eta_P,\eta_P)\leqslant\sum_{K\subset S_P}\|f-Lu_h\|_{0,K}\|\eta_P\|_{0,K}+\sum_{\Gamma\subset S_P}\Big\|J_\Gamma\Big(\frac{\partial u_h}{\partial n}\Big)\Big\|_{0,\Gamma}\|\eta_P\|_{0,\Gamma}.$$

由迹定理及 $\eta_P\in H_0^1(S_P)$，有

$$\|\eta_P\|_{0,\Gamma}\leqslant ch_\Gamma^{1/2}\|\eta_P\|_{1,S_P},\ \forall\Gamma\subset S_P$$

及

$$\|\eta_P\|_{0,K}\leqslant ch_K\|\eta_P\|_{1,K},\ \forall K\subset S_P.$$

于是

$$\|\eta_P\|_E^2\leqslant c\varepsilon_P\|\eta_P\|_{1,\Omega}\leqslant c\varepsilon_P\|\eta_P\|_E.$$

为了证明 ε_P 也是 $\|\eta_P\|_E$ 的下估计，我们对边值问题和网格剖分作进一步的假设.

设 a_{ij}，b，$f\in P_n(\Omega)$，对某固定 $n\in\mathbf{N}$. 这里 $P_n(\Omega)$ 表示 Ω 上所有次数不超过 n 的多项式全体. 还假设在 $\mathbf{R}^2$ 中有有限个由三角形组成的区域 $\hat{S}_k$ $(k=1,\cdots,K)$ 作为标准支集，使得 $\forall P\in\bigcup_h\mathscr{T}_h$，总存在仿射变换将 S_P 变成 $\hat{S}_k$ 中之一. 例如由逐步中点加密产生的部分簇就具有这一性质.

在上述假设下我们有

引理 5. 存在与 a_{ij}, b, f, $\mathscr{T}_h$, P 无关的常数 c，使得

$$\|\eta_P\|_E\geqslant c\varepsilon_P. \tag{25}$$

证. 反证法. 设(25)不对，于是存在一列 a_{ij}^m, b^m, f^m, $\mathscr{T}_{h_m}$, P_m, u_{h_m}，使得：

$$\|\eta_{P_m}\|\leqslant\frac{1}{m}\Big(\Big(\sum_{K\subset S_{P_m}}h_K^2\int_K(f^m-L^mu_{h_m})^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{\Gamma\subset S_{P_m}}h_\Gamma\int_\Gamma\Big(J_m\Big(\frac{\partial u_{h_m}}{\partial n}\Big)\Big)^2ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big),\ m=1,2,\cdots, \tag{26}$$

不妨设所有的 S_{P_m} 都可经仿射变换变到同一标准区域 $\hat{S}$ 上. 用“∧”表示经过变换的作用，则有 $\hat{\eta}_{P_m}\in H_0^1(\hat{S})$，

$$\hat{a}\left(\hat{\eta}_{P_m},\hat{v}\right)=\int_{\hat{S}}\hat{\varphi}_m\hat{v}\,d\hat{x}+\sum_{\hat{\Gamma}\subset\hat{S}}\int_{\hat{\Gamma}}\hat{\psi}_m\hat{v}\,d\hat{s},\ \forall\hat{v}\in H_0^1(\hat{S}), \tag{27}$$

$$\|\hat{\eta}_{P_m}\|_{H_0^1(\hat{S})} \leqslant \frac{c}{m}\left(\|\hat{\varphi}_m\|_{H^0(\hat{S})} + \sum_{\hat{\Gamma}\subset\hat{S}} \|\hat{\psi}_m\|_{H^0(\hat{\Gamma})}\right), \tag{28}$$

其中 $\hat{\varphi}_m = h_{P_m}^2 \widehat{(f^m - L^m u_{h_m})}$,

$$\hat{\psi}_m = C_{\hat{\Gamma}} h_\Gamma \widehat{J_\Gamma\left(\frac{\partial u_{h_m}}{\partial n}\right)},$$

$C_{\hat{\Gamma}}$ 是仅依赖于 $\hat{\Gamma}$ 的常数．不妨设

$$\|\hat{\varphi}_m\|_{H^0(\hat{S})} + \sum_{\hat{\Gamma}\subset\hat{S}} \|\hat{\psi}_m\|_{H^0(\hat{\Gamma})} = 1. \tag{29}$$

由于 a_{ij}，b，$f\in P_n(\Omega)$，存在常数 c 使

$$\|\hat{\psi}_m\|_{H^1(\hat{\Gamma})} \leqslant c\|\hat{\psi}_m\|_{H^0(\hat{\Gamma})}, \quad \forall \hat{\Gamma}\subset\hat{S},$$

$$\|\hat{\varphi}_m\|_{H^1(\hat{K})} \leqslant c\|\hat{\varphi}_m\|_{H^0(\hat{K})}, \quad \forall \hat{K}\subset\hat{S}.$$

结合(29)知 $\hat{\psi}_m$ 和 $\hat{\varphi}_m$ 分别是 $H'(\hat{\Gamma})$，$\hat{\Gamma}\subset\hat{S}$ 和 $H'(\hat{K})$，$\hat{K}\subset\hat{S}$ 中的有界序列．由 Rellich 紧嵌入定理知，分别存在 L^2 意义下的收敛子列，不妨仍记为其自身．于是，存在 $\hat{\psi}\in H^0(\bigcup_{\hat{\Gamma}\subset\hat{S}}\hat{\Gamma})$，$\hat{\varphi}\in H^0(\hat{S})$，使

$$\lim_{m\to\infty}\|\hat{\psi}_m - \hat{\psi}\|_{0,\hat{\Gamma}} = 0, \quad \forall \hat{\Gamma}\subset\hat{S},$$

$$\lim_{m\to\infty}\|\hat{\varphi}_m - \hat{\varphi}\|_{0,\hat{S}} = 0$$

且

$$\|\hat{\varphi}\|_{H^0(\hat{S})} + \sum_{\hat{\Gamma}\subset\hat{S}} \|\hat{\psi}\|_{H^0(\hat{\Gamma})} = 1. \tag{30}$$

记 $\hat{\eta}$ 为(27)相应于 $\hat{\varphi}$，$\hat{\psi}$ 的解，由(28)和(30)取极限得 $\hat{\eta}=0$，即

$$\int_{\hat{S}} \hat{\varphi}\hat{v} + \sum_{\hat{\Gamma}\subset\hat{S}}\int_{\hat{\Gamma}} \hat{\psi}\hat{v} = 0, \quad \forall \hat{v}\in H_0^1(\hat{S}).$$

这只有 $\hat{\varphi}=0$，$\hat{\psi}=0$．但与(30)矛盾．证毕．

令　$\varepsilon = \left(\sum_{P\in N_h} \varepsilon_P^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

定理 6．在前述有关边值问题和区域剖分的限制性假设下，存在常数 c_L，c_u，使得

$$c_L\varepsilon \leqslant \|e_h\|_E \leqslant c_u\varepsilon. \tag{31}$$

证明．结合定理 3、引理 4 和引理 5 立即得证．

这样我们找到了一个易于计算的后验估计量 ε，它是有限元解误差 $\|e_h\|_E$ 的一个等价估计．

附　　录

这里给出引理 2 的另一种证明方法．它改正了文〔3〕的证明中的错误．为简单起

见，只考虑线性元. 高次元的情况是类似的.

定理. $\forall v\in H_0^1(\Omega)$，$\exists v_h\in X_{oh}(\Omega)$，使

$$\|v-v_h\|_{H^s(K)}\leqslant ch_K^{1-s}\left[\sum_{\bar K_i\cap \bar K\neq\phi}|v|^2_{H^1(K_i)}\right]^{\frac12},\quad s=0,1,\ \forall K\subset\mathscr{T}_h;$$

常数 c 与 v 及 h 无关.

证. 设 δ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的单位向量，$t>0$. 则

$$\forall w\in H^1(K_t),\ |w(x+t\delta)-w(x)|_{H^s(K)}\leqslant 2t^{1-s}|w|_{H^1(K_t)},\ s=0,1. \tag{1}$$

事实上，设 $w\in C^1(K_t)\cap H^1(K_t)$，则

$$w(x+t\delta)-w(x)=\int_0^t \delta\cdot\nabla w(x+\alpha\delta)\,d\alpha.$$

于是

$$|w(x+t\delta)-w(x)|^2_{H^0(K)}=\int_K\left|\int_0^t\delta\cdot\nabla w(x+\alpha\delta)d\alpha\right|^2dx$$

$$\leqslant\int_K t\int_0^t|\delta\cdot\nabla(x+\alpha\delta)|^2d\alpha dx$$

$$\leqslant t^2|w|^2_{H^1(Kt)}$$

$$|w(x+t\delta)-w(x)|^2_{H^1(K)}\leqslant|w(x+t\delta)|_{H^1(K)}+|w|_{H^1(K)}\leqslant 2|w|_{H^1(Kt)}.$$

由极限便得(1)，又设 w_ε 表示由 w 经过光滑化所得到的函数（ε 适当小），则有与 h，w，ε 无关的常数 c 使得：$\forall w\in H^1(K_\varepsilon)$，

$$\|w_\varepsilon-w\|_{H^s(K)}\leqslant c\varepsilon^{1-s}\|w\|_{H^1(K\varepsilon)},\ s=0,1, \tag{2}$$

$$\|w_\varepsilon\|_{H^2(K)}\leqslant c\varepsilon^{-1}\|w\|_{H^1(K\varepsilon)}. \tag{3}$$

事实上，设 α_ε 为通常意义下的光滑子，则

$$w_\varepsilon(x)-w(x)=\int_{\mathbf{R}^2}(w(x-y)-w(x))\alpha_\varepsilon(y)dy,$$

$$D(w_\varepsilon-w)(x)=\int_{\mathbf{R}^2}(Dw(x-y)-Dw(x))\alpha_\varepsilon(y)dy.$$

于是

$$|w_\varepsilon-w|^2_{H^0(K)}=\int_K dx\left|\int_{\mathbf{R}^2}(w(x-y)-w(x))\alpha_\varepsilon(y)dy\right|^2$$

$$\leqslant\int_K dx\int_{\mathbf{R}^2}|w(x-y)-w(x)|^2\alpha_\varepsilon(y)dy$$

$$=\int_{\|y\|\leqslant\varepsilon}\alpha_\varepsilon(y)\int_K|w(x-y)-w(x)|^2dx$$

$$\leqslant c\varepsilon^2|w|^2_{H^1(K\varepsilon)}$$

类似地有

$$|D(w_\varepsilon-w)|^2_{H^0(K)}\leqslant c|W|^2_{H^1(K\varepsilon)},$$

$$|w_\varepsilon|^2_{H^0(K)}\leqslant|w|^2_{H^0(K\varepsilon)},$$

$$|Dw_\varepsilon|^2_{H^0(K)}\leqslant|w|^2_{H^1(K\varepsilon)}.$$

又

$$|D^2w_\varepsilon|^2_{H^0(K)}=\int_K dx\left|\int_{\mathbf{R}^2}Dw(x-y)D\alpha_\varepsilon(y)dy\right|^2$$

$$\leqslant\int_K dx\int_{R^2}|Dw(x-y)|^2|Da_\varepsilon(y)|dy\int_{R^2}|Da_\varepsilon(y)|dy$$

$$\leqslant c\varepsilon^{-1}\int_{\|y\|<\varepsilon}|Da_\varepsilon(y)|dy\int_K|Dw(x-y)|^2dx$$

$$\leqslant c\varepsilon^{-2}|w|^2_{H^1(K_\varepsilon)}.$$

以下构造 v_h. 象引理2一样对 v 作单位分解和平移后得 $v_{j,t}$, $j=1, 2, \cdots, n$. 令 $v^\varepsilon_{j,t}(x)=(v_{j,t})_\varepsilon(x)$. $\forall P\in N_h$, 设有 k 个单元 $K_1^{(P)}, \cdots, K_k^{(P)}$ 以 p 为顶点. 定义 $\xi_p=\min\{h_{k,i}(\mathrm{p}), i=1, \cdots, k\}$, $v_j^{[p]}=v^{\varepsilon_P}_{j,t_P}$, $\varepsilon_P=\xi_P\lambda_1$, $t_P=\xi_P\lambda_2$. 由于

$$0<\frac{1}{\nu}\leqslant\frac{h_{K_1}}{h_{K_2}}\leqslant\nu,\ \forall K_1,K_2\in\mathscr{T}_h$$

取 $\lambda_2<\dfrac{1}{2\nu}$, $\lambda_1<\min\left\{\dfrac{\lambda_2}{2}, \dfrac{d_0}{2}\lambda_2\right\}$, 则由 $\lambda_1<\dfrac{d_0}{2}\lambda_2$ 知 $v_j^{[P]}\in H_0(\Omega)$.

此外, 若记

$$h_j^{[P]}=\min\{h_K|\bar K\cap\bar K_j^{(P)}\neq\phi\},\ j=1, \cdots, k,$$

则有

$$t_P=\xi_P\lambda_2\leqslant\frac{1}{2\gamma}h_{K_j}(\mathrm{P})\leqslant\frac{1}{2}h_j^{(P)},\ j=1, \cdots, k. \tag{4}$$

$$\varepsilon_P\leqslant\frac{1}{2}t_P\leqslant\frac{1}{4}h_j^{(P)},\ j=1, \cdots, k. \tag{5}$$

引进函数: $u_j=\sum\limits_{P\in N_h}v_j^{[P]}$. 于是 $\forall K\in\mathscr{T}_h$ 成立:

$$\|u_j-v_j\|_{H^s(K)}\leqslant ch_K^{1-s}\Big[\sum_{\bar K_l\cap\bar K\neq\phi}\|v_j\|^2_{H^1(K_l)}\Big]^{\frac12},\quad s=0,1. \tag{6}$$

事实上, 设 K 的三个顶点为 P_i, $i=1, 2, 3$, 有

$$(u_j-v_j)\Big|_K=\sum_{i=1}^3 w_{P_i}(v_j^{[P_i]}-v_j)\Big|_K$$

而

$$\|v_j^{[P_i]}-v_j\|_{H^s(K)}\leqslant\|v^{\varepsilon_{P_i}}_{j,t_{P_i}}-v_{j,t_{P_i}}\|_{H^s(K)}+\|v_{j,t}-v_j\|_{H^s(K)}$$

$$\leqslant ch_K^{1-s}[\|v_{j,t_{P_i}}\|_{H^s(K_{\varepsilon_{P_i}})}+\|v_j\|_{H^s(K_{t_{P_i}})}]$$

$$\leqslant ch_K^{1-s}[\|v_j\|_{H^s(K_{(\varepsilon_{P_i}+t_{P_i})})}+\|v_j\|_{H^s(K_{t_{P_i}})}]$$

$$\leqslant ch_K^{1-s}\Big[\sum_{\bar K_l\cap K\neq\phi}\|v_j\|^2_{H^s(K_l)}\Big]^{\frac12},\quad s=0,1.$$

由此易得(6). 类似地可证:

$$\|u_j\|_{H^s(K)}\leqslant ch_K^{-1}\Big[\sum_{\bar K_l\cap\bar K\neq\phi}\|v_j\|^2_{H^1(K_l)}\Big]^{\frac12}. \tag{7}$$

于是令 $v_h=\sum\limits_{j=1}^n u_j^I\in H_{0h}$, 其中 u_j^I 表示 u_j 在 X_h 中的插值函数. 从而有

$$\|v-v_h\|_{H^s(K)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|v_j-u_j^I\|_{H^s(K)}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \|v_j-u_j\|_{H^s(K)}+\|u_j-u_j^I\|_{H^s(K)}$$

$$\leqslant c\sum_{j=1}^{n}\left(h_K^{1-s}\left[\sum_{\bar{K}_l\cap\bar{K}\neq\phi}\|v_j\|^2_{H^1(K_l)}\right]^{\frac{1}{2}}+h_K^{2-s}\|u_j\|_{H^2(K)}\right)$$

$$\leqslant ch_K^{1-s}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\bar{K}_l\cap\bar{K}\neq\phi}\|v_j\|^2_{H^1(K_l)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant ch_K^{1-s}\left[\sum_{\bar{K}_l\cap\bar{K}\neq\phi}\|v\|^2_{H^1(K_l)}\right]^{\frac{1}{2}},\quad s=0,1.$$

参 考 文 献

〔1〕 黄鸿慈，刘赏银，解椭圆型边值问题的逐步加密法，计算数学，1978年第2期和第3期.

〔2〕 穆默，椭圆边值问题数值解的多重网格技术及其软件设计，博士学位论文，中科院计算中心，北京，1986.

[3] I. Babuska, W. C. Rheinboldt, Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 15, No 4, 1978

[4] I. Babuska, W. C. Rheinboldt, A Posterior Error Analysis of Finite Element Solutions for One-Dimensional Problems, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 18, pp565-589, 1981.

[5] I. Babuska, M. Vogelius, Feedback and Adaptive Finite Element Solution of One-Dimensional Boundary Value Problems, Technical Note BN-1006, Univ. of Maryland, 1981

〔6〕 黄鸿慈，邪维南，一维边值问题有限元的后验误差估计，数学季刊 Vol. 2, pp 43-48, 1987

[7] I. Babuska A. Miller, A Posterior Error Estimates and Adaptive Techniques for the Finite Element Method, Tech. Note BN-963, Univ. of Maryland, 1981

〔8〕 胡显承，李津，有限元方法的后验误差估计及自适应算法，待发表

[9] O. C. Zienkiewicz, A. W. Craig, A Posterior Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement in the FEM, The Mathematical Basis of FEMs, 1984

[10] R. E. Bank, A. Weisor, Some Posterior Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations, Math. Comp., Vol. 44, pp283-301, 1985

[11] P. Clement, Approximation by Finite Element Functions Using Local Regularization, Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge Anal. Namér. R-2 pp 77-84, 1975

〔12〕 邪维南，解奇点问题的 h-version 有限元方法，硕士学位论文，中科院计算中心，1985